負の長さ・角度・面積・体積

宮本次郎

2002 年 10 月 19 日

1　はじめに

杜陵サークルの 7 月例会で岩手高校の佐々木先生から報告のあった「工藤君の方法」を考えてみると、係数が正の時も負のときも、長さに方向をつけて考えることによっておなじ作図で解くことができた。こういう場面では、なるほど座標で考えるのが自然であるように思えてくる。

そこで、同じような負の長さを考える場面をさがしてみたら、中学校で勉強するところにも負の長さを考える場面があることに気がついた。

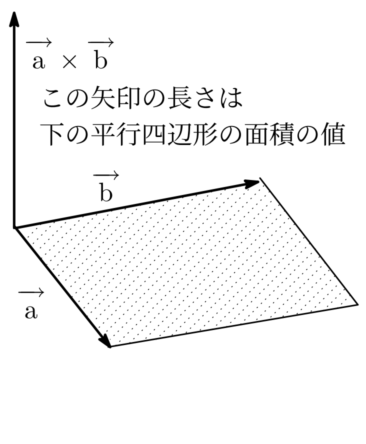
夏休みに「家庭の数学書」の原稿を書きながら考えた。私の担当のひとつの「外積」について、所定の字数だけでは、次のようにしか書けないでしまった。最後の 2 行にこめられた言外の意味を、数学セミナーの 9 月号に載っていたちょうどよい記事を紹介する形で、ここで補足したいと思う。

外積

与えられた 2 つの空間ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{a}}, \overrightarrow{\mathrm{b}}$ に対して、長さは、その二つのベクトルでできる平行四辺形の面積の大きさ、方向はその平行四辺形に垂直でフレミングの左手の法則で決まる方向として決まるベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{a}} \times \overrightarrow{\mathrm{b}}$ とかき、$\overrightarrow{\mathrm{a}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{b}}$ の外積といいます。この方向は左手を出して、中指を $\overrightarrow{\mathrm{a}}$、人差し指を $\overrightarrow{\mathrm{b}}$ としたときの親指の方向です。

中学校の理科で、電流の流れる方向と大きさを矢印で $\overrightarrow{\mathrm{I}}$、その場所の磁界の方向と大きさを矢印で $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ と表したときに、電流が受ける力を表す矢印 $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ は、この二つのベクトルの外積を用いて、$\overrightarrow{\mathrm{F}} = \overrightarrow{\mathrm{I}} \times \overrightarrow{\mathrm{B}}$ と表すことができます。

より高次元のベクトルに対しても外積を考えますが、高校までの数学や理科の中では登場しません。

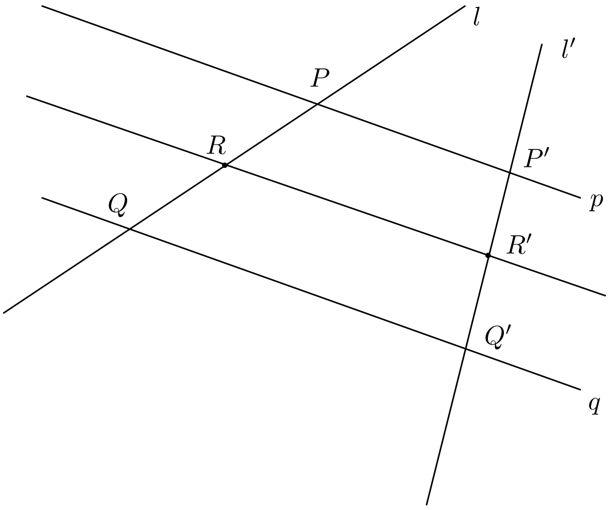


2　逆は必ずしも真ならず

初等幾何が学校で教えられていたころ、その「幾何」の中で証明の方法についてや論理について教えられていた。「逆は必ずしも真ならず」という言葉はそういう中で使われてきた。論理的に説明をするときに、ついうっかりと逆の命題を使ってはいけないということを注意することも大事だが、証明した定理の逆が成り立つかどうかを考えることは、その定理のなかみを考えるうえで楽しいことだ。逆がなりたつかどうか考えることによって新しい定理が生まれることもある。

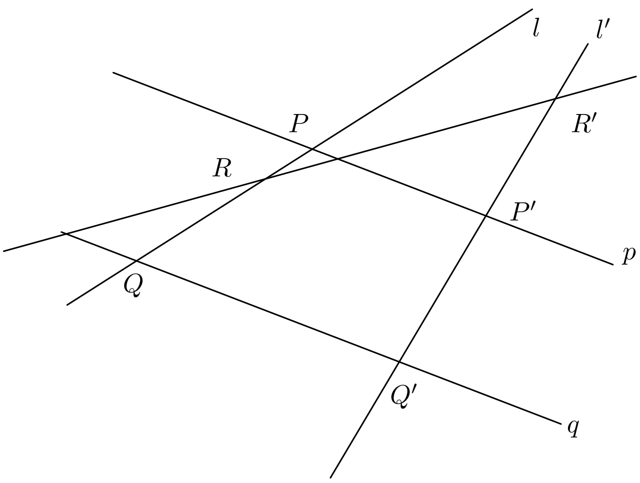
中学校で勉強する平行線の性質について考えてみよう。

定理 1 (平行線の性質) 2 本の平行線 p, q が、別の 2 直線 l, l' と交わる点を、それぞれ P, Q および P', Q' とする。



$$RR' // p \quad \Longrightarrow \quad PR : RQ = P'R' : R'Q'$$

普通はこの定理については逆も成り立つということになっているのであるが、よくよく考えるとそうでもない。こういう状況もありうる。

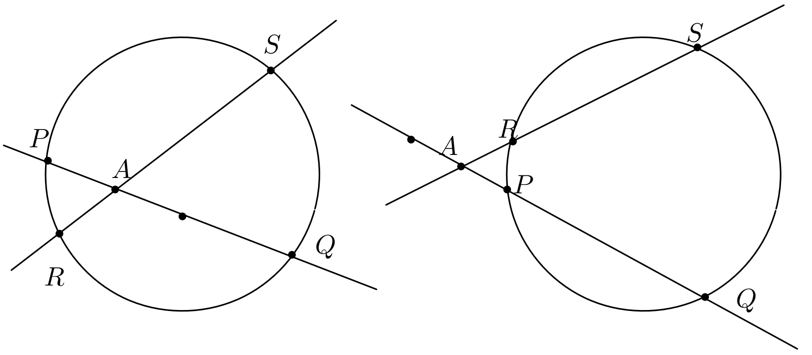


言葉のあやのようなところもあるけれども、中学校では「外分点」を知らない。高校で「外分点」を勉強する以上、こういう状況もかんがえなければならい。

「外分点」を勉強する高校では、この定理については逆は成り立たないと考えざるを得ない。

定理 2 (方べきの定理) 点 A を通る *2* つの直線上に *2* 点 P, Q および R, S があるとき、

$$P, Q, R, S \text{ が同一円周上にある} \quad \Longrightarrow \quad AP \cdot AQ = AR \cdot AS$$

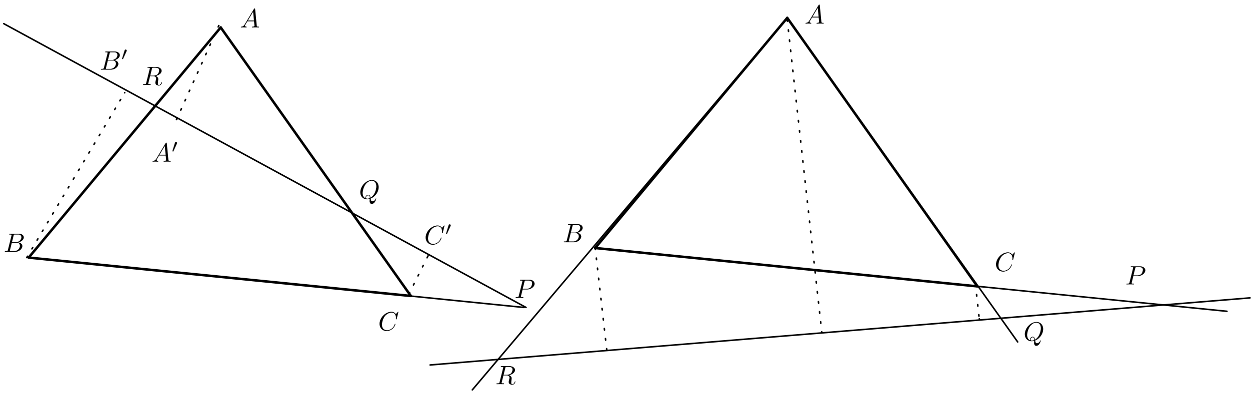


この定理も逆は成り立たない。各図で、円上にある点 P に対して、点 A 関して対称に点 P' をとると、この点に関してもこの関係式は成り立っているのもかかわらず、この 4 点は同一円周上にない。

定理 3 三角形 ABC の *3* 辺 BC, CA, AB またはその延長が、頂点を通らない *1* 直線と交わる点を、それぞれ P, Q, R とすれば、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

である。



A, B, C から、この直線に下ろした垂線の足を、それぞれ、A', B', C' とする。$AA'//BB'//CC'$ であるから、

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BB'}{C'C}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{C'C}{AA'}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{AA'}{B'B}$$

となる。この 3 つの式を辺々掛け合わせて、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BB'}{C'C} \cdot \frac{C'C}{AA'} \cdot \frac{AA'}{B'B} = 1$$

となる。

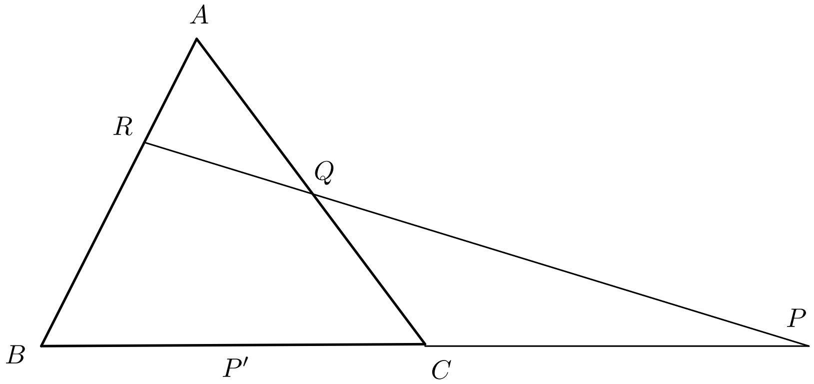
注 1 メネラウスの定理は、次のようにいうことも多い。

定理 *4* 三角形 ABC の辺 BC, CA, AB またはそれらの延長上に、点 P, Q, R があり、これが同一直線上にあるときは、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

となる。

同じ比に分けるにしても内分と外分と *2* つの点が出てくることから、このように述べたメネラウスの定理には逆が成り立たない。



すなわち、いま、一直線上にある点 P, Q, R については、上の定理のように、$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ が成り立っているとして、このとき、P' として、同じ辺 AB あるいはその延長上で、内分と外分の違いで P と異なる別の点 P' が取れて、この P' について $\frac{BP}{PC}=\frac{BP'}{P'C}$ が成り立っているので、一直線上になり *3* 点 P', Q, R についても $\frac{BP'}{P'C}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ が成り立っている。

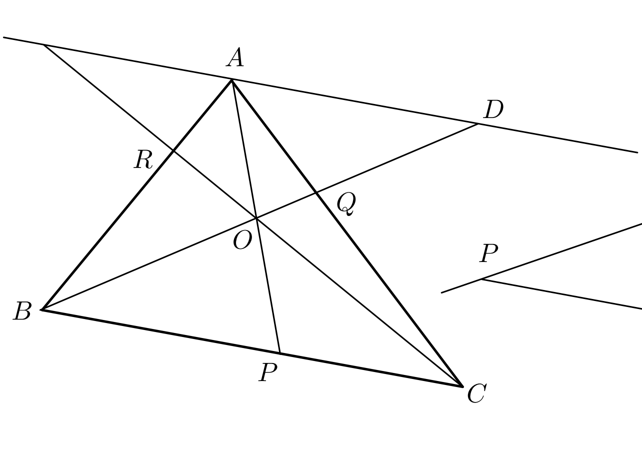
　したがって、メネラウスの定理の逆は成立しない。

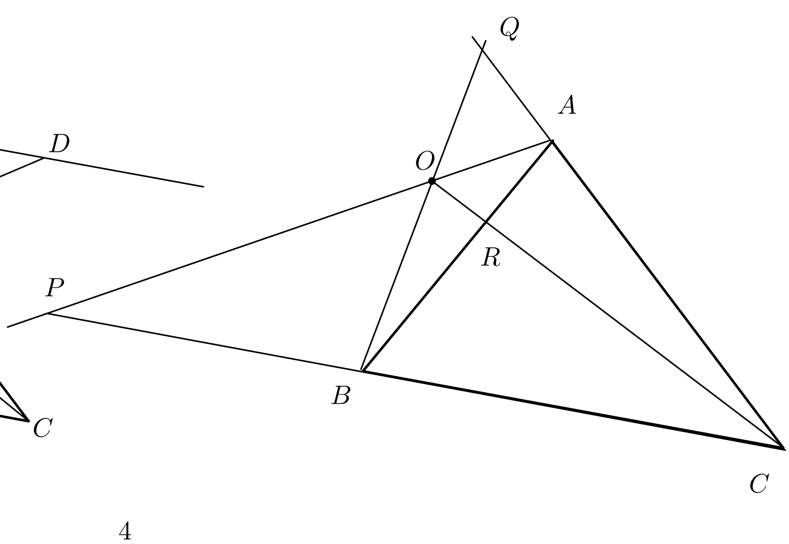
メネラウスの定理に似た定理に「チェバの定理」がある。

定理 5 (チェバの定理) 三角形の *3* 頂点 A, B, C と、三角形の辺またはその延長上にない点 O とを結ぶ直線が辺 BC, CA, AB またはその頂点と交わる点を P, Q, R とすれば

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

である。





証明　点 A を通って BC に平行にひいた直線と BQ, CR との交点を D, E とすれば

$$\Delta QBC \backsim \Delta QDA \quad \text{より} \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{CB}{DA}$$
$$\Delta RBC \backsim \Delta RAE \quad \text{より} \quad \frac{AR}{RB} = \frac{AE}{CB}$$

となっている。また、

$$\Delta OBP \backsim \Delta ODA \quad \text{より} \quad \frac{BP}{DA} = \frac{PO}{AO}$$
$$\Delta OPC \backsim \Delta OAE \quad \text{より} \quad \frac{PO}{AO} = \frac{PC}{AE}$$

となるから、

$$\frac{BP}{PC} = \frac{DA}{AE}$$

したがって、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{DA}{AE} \cdot \frac{CB}{DA} \cdot \frac{AE}{CB} = 1$$

である。

注 2 チェバの定理についても、メネラウスの定理と同様に、内分点・外分点にからんで、逆が成り立たない。

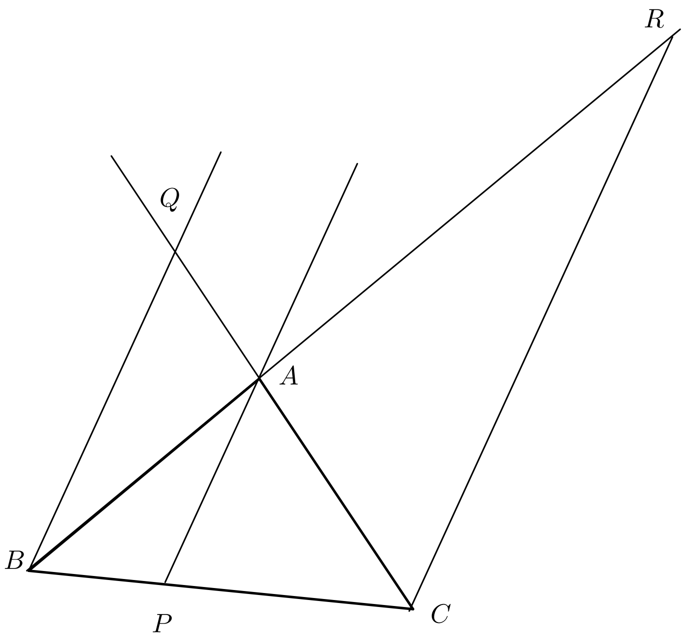
　メネラウスの定理と同様に、チェバの定理についても次のような表現もある。

定理 *6* 三角形 ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長線上に、それぞれ、点 P, Q, R があって、AP, BQ, CR が *1* 点で交われば、

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

が成り立つ。

この場合には、上で述べたような理由のほかに、もう一つ逆が成り立たない場合が存在する。



この図のように、$AP//BQ//CR$ の場合には、平行線の性質により、

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{CB}{BP},\ \frac{AR}{RB}=\frac{PC}{CB}$$

が成り立つので、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{DA}{AE}\cdot\frac{CB}{BP}\cdot\frac{PC}{CB}=1$$

となっている。
　もちろん、こういう特別の状況を逃れるため、東京書籍の教科書ではチェバの定理は次のようになっている。

定理 7 三角形 ABC の辺 BC,CA,AB 上に、それぞれ、点 P,Q,R があって、AP,BQ,CR が *1* 点で交われば、

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つ。

以上、どれも「長さ」については、線分の長さとその方向をあわせて「(負の数も含めた) 実数」を用いることによると、これまで述べてきた定理についてはすべて逆が成立する。これまでの証明について、たとえば「 $CB=-BC$ 」というような読み替えをしていくとよいように書いてある。ただし、メネラウスの定理については、

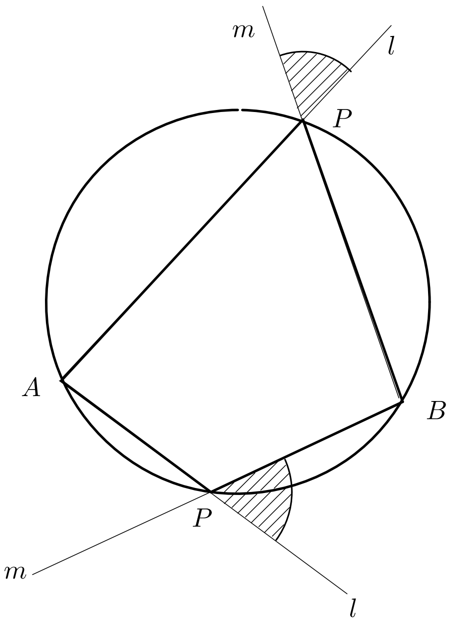
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=-1$$

というように、定理を述べるときに変更を要する。

3　角度

符号で線分の方向を考えることは、高校、数学　で解析幾何の初歩を学習する時に、内分点、外分点の公式を一つの表し方ができるという形で扱われている。一方で、三角比の応用として、2 直線のなす角を $\tan$ の加法定理を利用して求めることを学習するときには、混乱の原因となっている。三角関数を考える時には、「負の角」というものを、回転の方向を考えて決めている。このことと図形の世界とのつながりが十分できないまま、問題を解いていく中で、$\tan\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ から、$\theta = 135°$ と計算しておきながら、「よって、2 直線のなす角は $45°$ 」と意味もわからず書いている。

Cabri でみた、円周角についても、直線 AP を直線 BP にむけて回転する方向を考えに入れれば、点 P がどこにあっても一定と見ることができるようになる。



4　面積

チェバの定理の証明は次のようにすることも多い。

ΔOAB と ΔOCA の面積比は、共通の辺 OA を底辺にとって考えれば、高さの比に帰着される。この高さの比は、辺 BP と PC の長さの比になるので、結局、

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\Delta OAB}{\Delta OAC}$$

となる。同様にして、

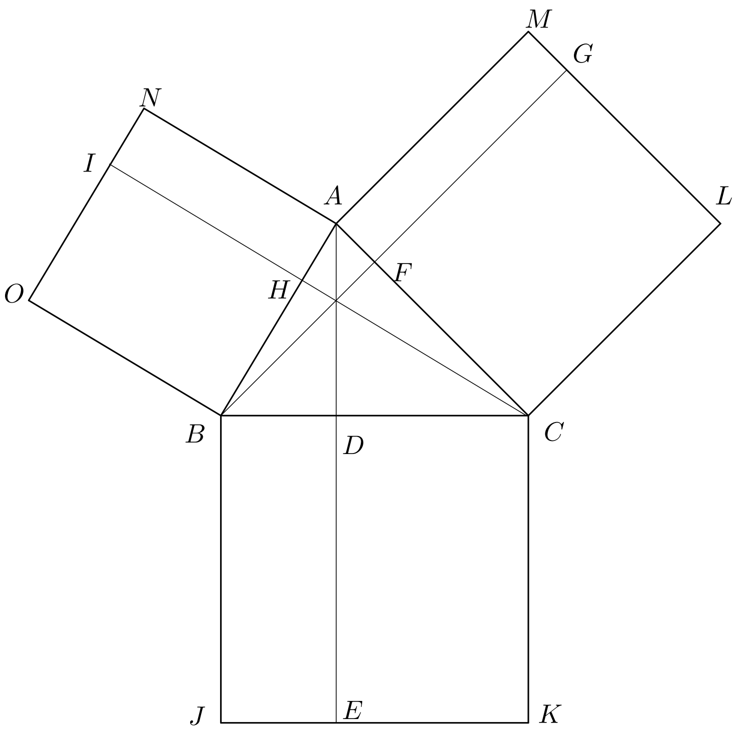
$$\frac{CQ}{QA} = \frac{\Delta OBC}{\Delta OAB}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{\Delta OAC}{\Delta OBC}$$

だから、この 3 つの式を辺々かけて、結果を得る。

このときも、回転する方向について、負の数も考えることにすると、三角形の面積についても負の数が登場し、そのようにしても、チェバの定理の逆が成り立たない場合を排除できるようになっている。

5　余弦定理の証明

面積を使って余弦定理の証明をしようとするとき、鋭角のときと鈍角のときとで状況が変化する。しかし、負の長さを考えることによって（自然と負の面積も考えることになり）どちらの場合も統一的に理解できることになる。



図に表れる正方形・長方形の面積を調べてみよう。正方形 $BCJK$ は長方形 $BJED$ と長方形 $DEKC$ に、正方形 $ACLM$ は長方形 $FCLG$ と $FGMA$ に、正方形 $ABON$ は、長方形 $AHIN$ と $HBOI$ に分けられ、

$$
\begin{aligned}
\text{長方形 } BJED &= BJ \times BD = a \times c\cos B = ca\cos B \\
\text{長方形 } DEKC &= DE \times DC = a \times b\cos C = ab\cos C \\
\text{長方形 } FCLG &= CL \times FC = b \times a\cos C = ab\cos C \\
\text{長方形 } FGMA &= FG \times FA = b \times c\cos A = bc\cos A \\
\text{長方形 } AHIN &= AN \times AH = c \times b\cos A = bc\cos A \\
\text{長方形 } HBOI &= HI \times HB = c \times a\cos B = ca\cos B
\end{aligned}
$$

となっている。正方形と長方形の関係では

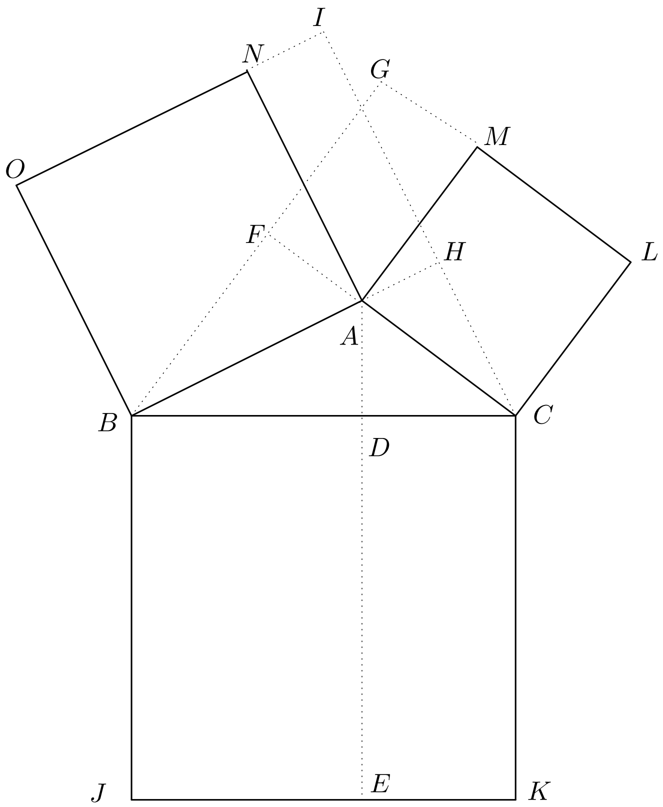
$$
\begin{aligned}
a^2 &= DEKC + BJED = ab\cos C + ca\cos B \\
b^2 &= FCLG + FGMA = ab\cos C + bc\cos A \\
c^2 &= AHIN + HBOI = bc\cos A + ca\cos B
\end{aligned}
$$

第 1 式から、第 2 式と第 3 式を引くと、

$$
a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A
$$

となる。

　次に鈍角三角形の場合を考えよう。



角 A が鈍角のとき、頂点 B, C から対辺に垂線を引いて図のような正方形・長方形を考える。

$$
\begin{aligned}
\text{長方形 } BJED &= BJ \times BD = a \times c\cos B = ca\cos B \\
\text{長方形 } DEKC &= DE \times DC = a \times b\cos C = ab\cos C \\
\text{長方形 } FCLG &= CL \times FC = b \times a\cos C = ab\cos C \\
\text{長方形 } FGMA &= FG \times FA = b \times (-c\cos A) = -bc\cos A \\
\text{長方形 } AHIN &= AN \times AH = c \times (-b\cos A) = -bc\cos A \\
\text{長方形 } HBOI &= HI \times HB = c \times a\cos B = ca\cos B
\end{aligned}
$$

となっている。正方形と長方形の関係では

$$
\begin{aligned}
a^2 &= DEKC + BJED = ab\cos C + ca\cos B \\
b^2 &= FCLG - FGMA = ab\cos C + bc\cos A \\
c^2 &= AHIN - HBOI = bc\cos A + ca\cos B
\end{aligned}
$$

第 1 式から、第 2 式と第 3 式を引くと、

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A$$

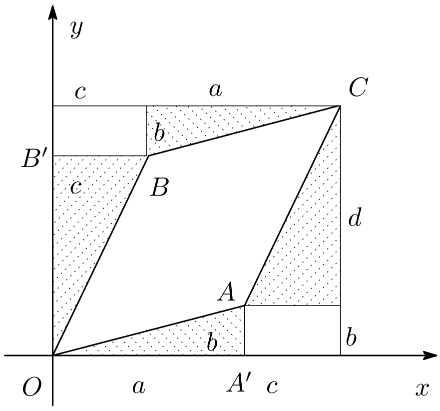
となる。

　負の長さと負の面積を考えることによって、統一的に表された結果が余弦定理なのだと見ることができる。

6　負の面積と線型性

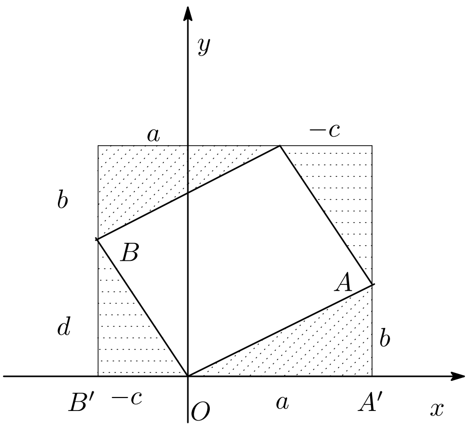
6.1　座標から求める平行四辺形の面積

原点 $O(0,0)$ 、点 $A(a,b)$ 、点 $B(c,d)$ に対して、 OA と OB を 2 辺に持つ平行四辺形の面積を考える。



この図の場合、外側の大きな長方形の面積は $(a+c)(b+d)$ となっている。直角三角形 OAA' の面積は $\frac{1}{2}ab$ 、直角三角形 OBB' の面積は $\frac{1}{2}cd$ 、小さな長方形の面積は bc となる。したがって、 OA と OB を 2 辺に持つ平行四辺形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= (a+c)(b+d) - 2\cdot\frac{1}{2}ab - 2\cdot\frac{1}{2}cd - 2bc \\ &= ab+ad+bc+cd-ab-cd-2bc \\ &= ad-bc \end{aligned}$$

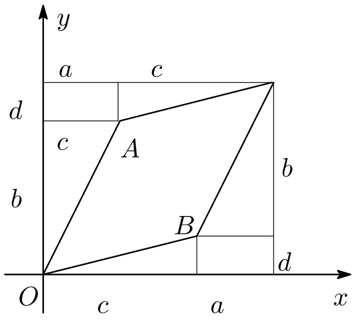


この図の場合、c が負の場合は、$-c$ が正となり、外側の大きな長方形の面積は $(a+(-c))(b+d)$ 、直角三角形 OAA' の面積は $\frac{1}{2}ab$ 、直角三角形 OBB' の面積は $\frac{1}{2}(-c)d$ となっている。した

がって、

$$
\begin{aligned}
S &= (a+(-c))(b+d) - 2\cdot\frac{1}{2}ab - 2\cdot\frac{1}{2}(-c)d \\
&= ab+ad-bc-cd-ab+cd \\
&= ad-bc
\end{aligned}
$$

となる。



この図の場合は

$$
\begin{aligned}
S &= (a+c)(b+d) - 2\cdot\frac{1}{2}ab - 2\cdot\frac{1}{2}cd - 2ad \\
&= ab+ad+bc+cd-ab-cd-2ad \\
&= bc-ad
\end{aligned}
$$

6.2　ベクトルのなす角

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ とする。二つのベクトル $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ の「なす角」を、

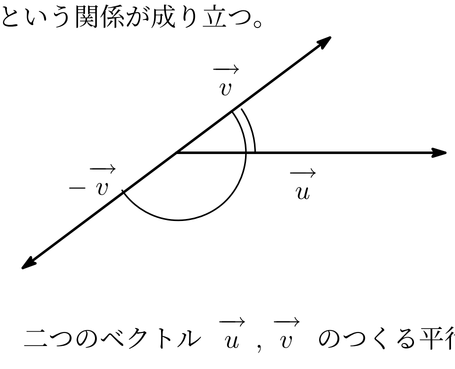
$\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ の始点をそろえて、 $\overrightarrow{u}$ から $\overrightarrow{v}$ へ回転するときの回転量

として、向きをつけた（負の角も含めた）量考えることにしよう。

このように考える「なす角」を $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ と表わすことにしよう。

$$
\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})
$$
$$
\angle(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) - \pi
$$

という関係が成り立つ。



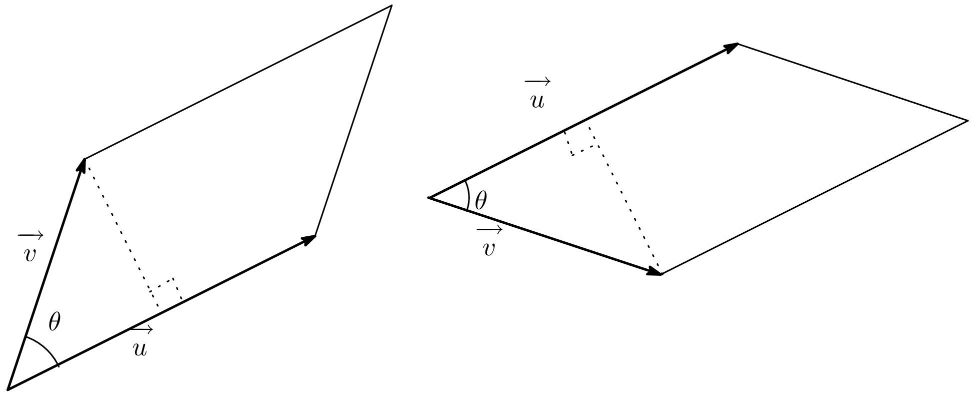
二つのベクトル $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ のつくる平行四辺形の面積を、

$$
S = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \sin\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})
$$

とする。このとき、

$$S = \overrightarrow{u} \wedge (-\overrightarrow{v}) = |\overrightarrow{u}| \cdot |-\overrightarrow{v}| \sin\angle(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \sin\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) - \pi = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$$

となり、向きつきの角度・長さ・面積が三角比を通して整合していることがわかる。



6.3　面積の線型性

さらに、角度の正負とが前セクションで考えた面積 $S = ad - bc$ ともうまく整合している。

二つのベクトル $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ のつくる平行四辺形の面積 S を、

$$S = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$$

と表わすことにしよう。上で見たように

$$S = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \sin\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

である。この定義と、二つのベクトル $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ のなす角 $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ の性質から、

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$$

が成り立つ。

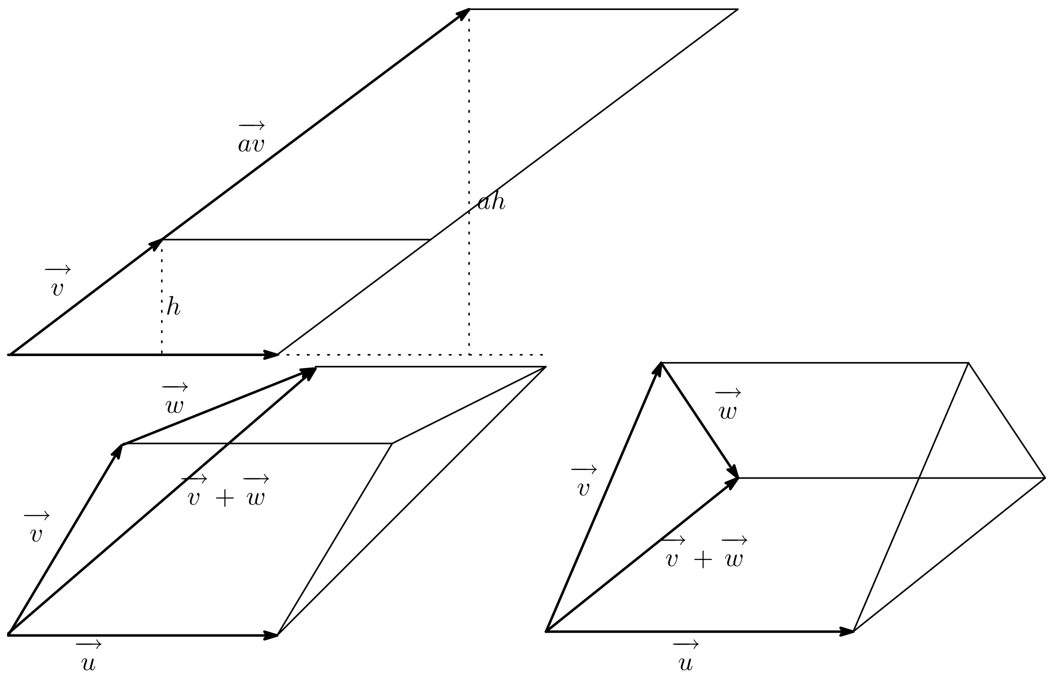
さらに、この $S = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$ は、各ベクトルについて線型写像になっていることが、次の図よりわかる。

定理 8 二つのベクトル $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ のつくる平行四辺形の面積 $S = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ について、次の性質が成り立つ。

(1) $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$

(2) $\overrightarrow{u} \wedge (a\overrightarrow{v}) = a(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$

(3) $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$



6.4　面積の座標表示

2つの基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ を

$$\overrightarrow{e_1}=(1,0),\quad \overrightarrow{e_1}=(0,1)$$

とすると、 $\angle(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1})=0^\circ$ なので、

$$\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_1}=|\overrightarrow{e_1}|\cdot|\overrightarrow{e_1}|\angle(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1})=0$$

となる。同様に

$$\overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_2}=0$$

となる。また、 $\angle(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})=+90^\circ$ なので、

$$\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_2}=1$$

となる。また

$$\overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_1}=-\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_2}=-1$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{OA}=(a,b)=a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{OB}=(c,d)=c\overrightarrow{e_1}+d\overrightarrow{e_2}\end{aligned}$$

として、これらのことと面積 $S = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ の線型性を使うと

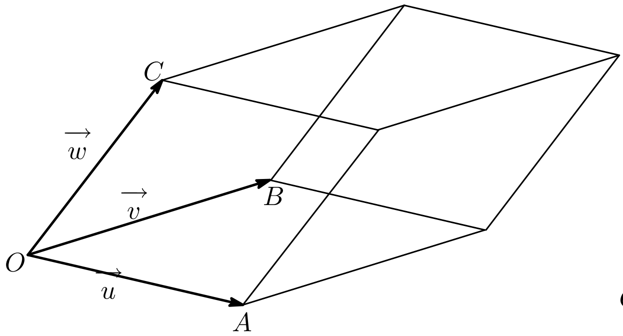
$$\begin{aligned} S &= \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \\ &= (a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}) \wedge (c\overrightarrow{e_1} + d\overrightarrow{e_2}) \\ &= ac\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_1} + ad\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} + bc\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_1} + bd\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_2} \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

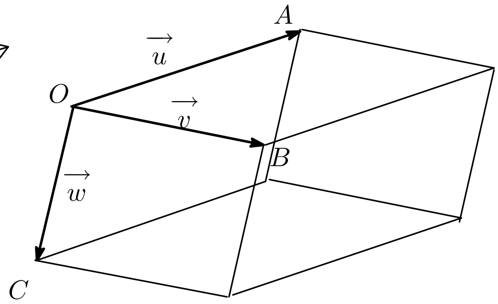
となる。図を用いて面積を計算するときには、図の状態によって場合わけを必要としたが、向きを入れた角度・長さ・面積を考えることによって、「線型性」が保証され、場合抜きをしないで、すっきりと証明できる。

7　負の体積

7.1　3 次元空間で考える体積

空間の 3 つのベクトル $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$ に対して、辺 $OA,\ OB,\ OC$ を 3 辺とする次の図のような平行 6 面体を考えよう。





空間は、$\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}$ を含む平面により 2 つに分けられる。右手を出して、親指を $\overrightarrow{u}$ 、人差し指を $\overrightarrow{c}$ としたときに、中指が指す方向を正とし、$\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}$ を含む平面に関して中指が指す方向と反対の方向を負の方向とする。

このようにすると、二つのベクトル $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}$ で定まる方向付きの（負の面積を含んだ）面積 $S = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ に対しても、二つのベクトル $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}$ で定まる空間中の正の方向の $\overrightarrow{w}$ に対して、三つのベクトル $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}$ で定まる平行 6 面体の体積を正の値と定めて方向付きの体積 V を考える。そして、面積と同様に

$$V = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$$

と表わす。

二つのベクトル $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}$ を固定したとき、第 3 のベクトル $\overrightarrow{w}$ についての線型性が、面積のときと同様にして示すことができる。底面を固定したときに、体積 V が高さによって定まることを用いる。

さらに、図を見て定義からわかることとして、

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \\ &\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \end{aligned}$$

がある。

したがって、

$$\overrightarrow{e_1}=(1,0,0),\quad \overrightarrow{e_2}=(0,1,0),\quad \overrightarrow{e_3}=(0,0,1)$$
$$\overrightarrow{u}=(a_1,a_2,a_3),\quad \overrightarrow{v}=(b_1,b_2,b_3),\quad \overrightarrow{w}=(c_1,c_2,c_3)$$

とすると、

$$\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_2}=1$$
$$\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_1}=-1$$

であり、3 つのベクトルのうち、等しいものが入ると

$$\overrightarrow{e_i}\wedge\overrightarrow{e_i}\wedge\overrightarrow{e_j}=0$$

などのように 0 になる。そして、

$$\begin{aligned} V &= \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w} \\ &= \sum_{i=1}^{3}a_i\overrightarrow{e_i}\wedge\sum_{j=1}^{3}b_j\overrightarrow{e_j}\wedge\sum_{k=1}^{3}c_k\overrightarrow{e_k} \\ &= a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1 \end{aligned}$$

となる。

7.2 n 次元空間で考える体積

n 次元のベクトル $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \cdots\ \overrightarrow{a_n}$ に対して、この n 個のベクトルを辺に持つ平行体の体積を、帰納的に、順に決めていくことは想像に難くないだろう。

$$V=\overrightarrow{a_1}\wedge\overrightarrow{a_2}\wedge\ \cdots\ \wedge\overrightarrow{w}$$

とする。 V を決める各ベクトル $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \cdots\ \overrightarrow{a_n}$ に対して、これまで見てきたのと同様に線型性が成り立つであろう。そして、この V が n の行列式を決めることも、上の議論の繰り返しになる。

8 おわりに

数学の勉強を、数学の教科書をとおしてしかできない人は数多く、それなのに今の教科書はいろんな面白い部分を殺ぎ落としてできている。そういう教科書で勉強してきた私たちはどういう風にして生徒に数学を教えていくといいのだろうか。もっとのんびり遊びながら考える時間がほしいものだ。