数学教育協議会第 50 回全国研究大会

2 次方程式の作図による解法

岩手県立花巻北高等学校
宮　本　次　郎

1　はじめに

西三サークル通信を毎月送っていただいている。今年の 3 月に送っていただいたサークル通信のなかに、岡崎工業高校の丸山昌典先生のレポート「2 次方程式の解の作図」というのがあり、おもしろかったので次の杜稜サークルの月例会で紹介した。もともとはデカルトがやったことだとういうのでデカルトの方法を見ているうちに、サークルで、岩手高校の佐々木修一先生の生徒が 2 次方程式を作図で求めているという紹介があった。3 つの作図を見ているうちに、デカルトの方法にはデカルトの生きていた時代の雰囲気と限界が見え隠れしていて、現在高校で学ばれる解析幾何学に移行するまでの間にもう一歩重要なステップが必要であることが見えてきた。それを示しているの高校生工藤君方法で、こういう雰囲気は、どこかでみんなで感じている必要があると思えてきた。来年から数学 A で平面幾何をやることになるが、そのときの一つの視点として紹介したい。

2　扱う 2 次方程式の形とその解

一般に 2 次方程式は $ax^2+bx+c=0$ という形をしているけれども、a でわることによって、一般性を失うことなく $x^2+px+q=0$ という形に変形される。作図によってこの 2 次方程式を解くために係数 $p,\ q$ を線分の長さで表すことになるので、$p,\ q$ の正負によって作図の仕方が変ることが考えられる。以下の 3 つの方法を紹介するが、それぞれ、次の 4 つの場合に分けて考えてみる。

(1) $p>0,\ q>0$ のとき

(2) $p>0,\ q<0$ のとき

(3) $p<0,\ q>0$ のとき

(4) $p<0,\ q<0$ のとき

(1) $p > 0,\ q > 0$ **のとき**
判別式は $D = (-p)^2 - 4q = p^2 - 4q$ となっており、負となる場合、すなわち、実数解がない場合もある。$D \geqq 0$ の場合には、解と係数の関係より、$\alpha + \beta = -p < 0, \alpha\beta = q > 0$ となり、重解の場合も含めて、二つの解はともに負となる。

(2) $p > 0,\ q < 0$ **のとき**
$q < 0$ のときには、判別式 $D = p^2 - 4q$ はかならず正になるので、異なる二つの実数解を持つ。二つの実数解を α, β とすると、解と係数の関係より $\alpha + \beta = -p < 0, \alpha\beta = q < 0$ より、二つの解は異符号で、絶対値が大きい方が負の解になっている。

(3) $p < 0,\ q > 0$ **のとき**
この場合、実数解を持つときには、重解の場合を含めて、二つの解はともに正である。実数解を持たない場合もある。

(4) $p < 0,\ q < 0$ **のとき**
$q < 0$ であるから、異なる二つの実数解を持ち、二つの解は異符号で、絶対値が小さい方が負の解になっている。

$q > 0$ **のときの注意**
$q < 0$ のときには、p の値によって、実数解を持ったり持たなかったりする。こらからの作図による解法も、実数解を持つときと持たないときに、作図にどのように影響するか注意したい。

3　丸山先生の方法

丸山先生の方法は、2 次方程式を代数的に解いて、その解を作図しようというものである。

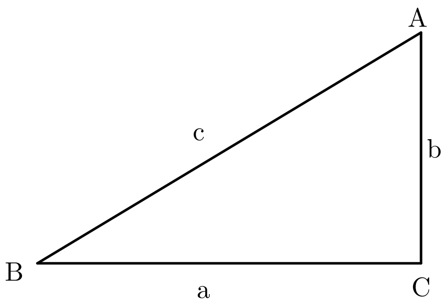
3.1　準備

3.1.1　2 次式の平方完成

2 次式 $x^2 + px + q$ は、次のように変形される。（これは平方完成といわれている。）

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

3.1.2　ピタゴラスの定理



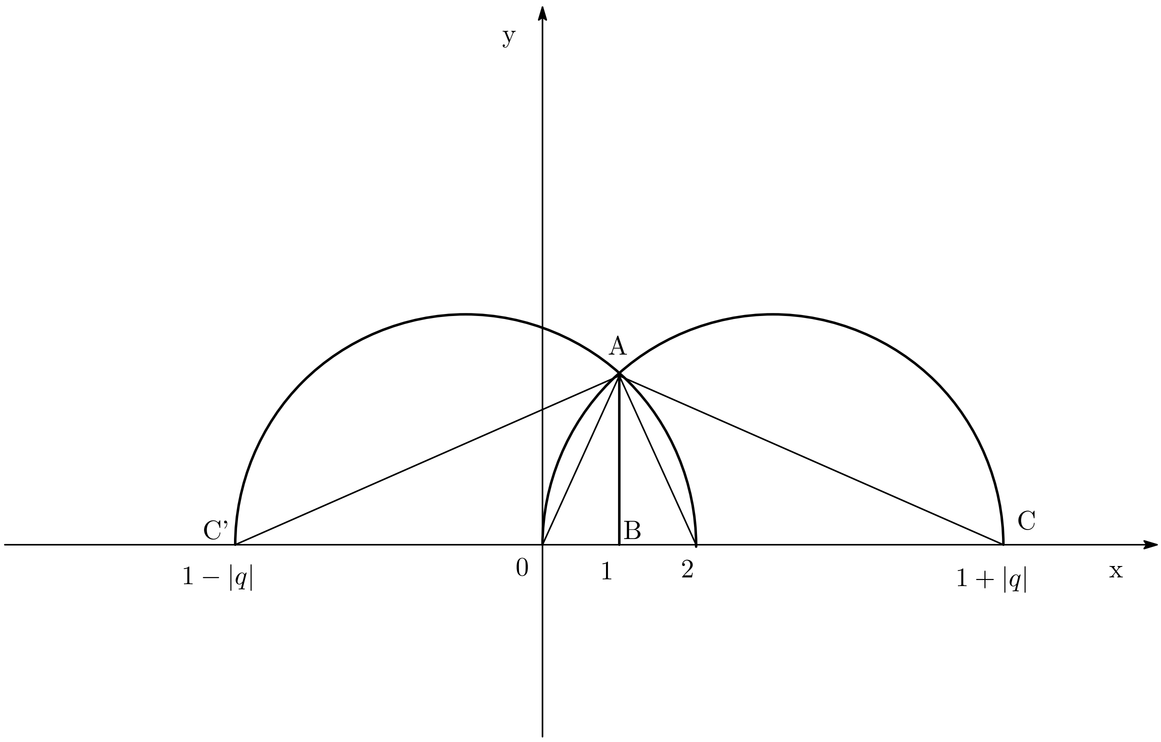
$$a^2 + b^2 = c^2$$

3.1.3　$\sqrt{|q|}$ の作図

x 軸上 $x = 1$ の点を B,$x = 1 + |q|$ の点を C として、OC を直径とする半円を描く。この円と直線 $x = 1$ との交点を A とする。このとき、三角形 OBA と ABC は相似な三角形になっている。$OB : BA = AB : BC$ すなわち、$1 : AB = AB : |q|$ であるから、$AB^2 = |q|$ となっている。

したがって、与えられた q に対してこのように作図するとき、$AB = \sqrt{|q|}$ となる。

また、直線 $x = 1$ に関して対称に C' をとってもよい。



3.2　２次方程式の解の作図のために

2 次方程式

$$x^2 + px + q = 0$$

の左辺を平方完成して

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0$$

と変形できる。この式をピタゴラスの定理に当てはめて考えよう。

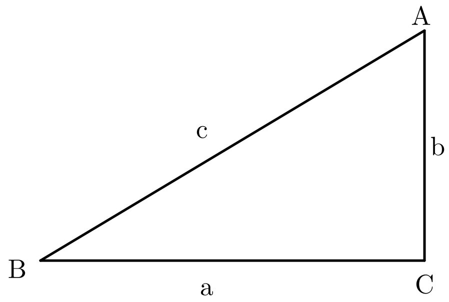
3.2.1 $q>0$ のとき

$q>0$ であれば、$q=\left(\sqrt{q}\right)^2$ と考えて、上の方程式を

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(\sqrt{q})^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

と考えよう。

左辺第１項の $x+\dfrac{p}{2}$ は、数直線上で解 x と点 $-\dfrac{p}{2}$ の間の距離を表している。これを a としよう。また左辺第２項の $\sqrt{q}$ を b, そして右辺の $\mid\dfrac{p}{2}\mid$ を c とする。



$a^2+b^2=c^2$

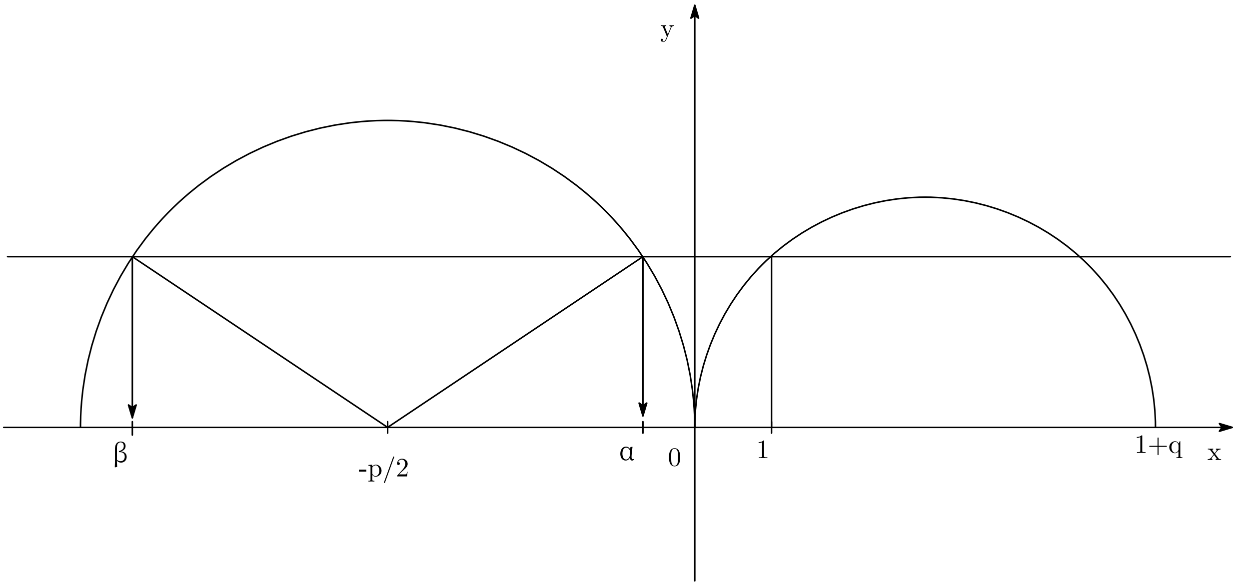
$$a=x-\left(-\frac{p}{2}\right),\quad b=\sqrt{q},\quad c=\mid\frac{p}{2}\mid$$

２次方程式の実数解は数直線上で点 $x=-\dfrac{p}{2}$ に対称に配置する。そこで、上の直角三角形の辺 a が x 軸上にあるように作図すればよい。

そのためには、方程式 $x^2+px+q=0$ で $q>0$ のときには、

1. x 軸上の点 $x=\dfrac{1+q}{2}$ を中心に原点を通るように半円 $(y\geq 0)$ を描く
2. 直線 $x=1$ を引く。これと半円との交点を通り、x 軸に平行な直線を引く。
3. x 軸上の点 $x=-\dfrac{p}{2}$ を中心に原点を通るように半円 $(y\geq 0)$ を描く
   この円の半径は $\mid-\dfrac{p}{2}\mid$ となっている）
4. この半円と (2) で引いた水平な直線との交点をとり、そこから x 軸に垂線をおろす。

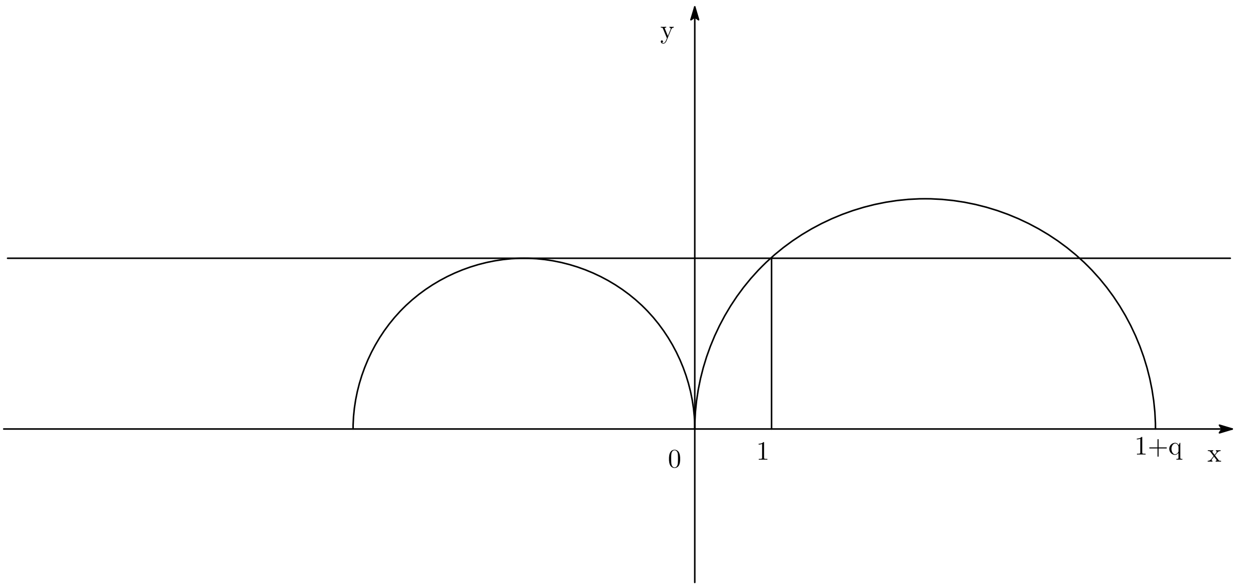
このように作図すると、この垂線の足が与えられた２次方程式の解になっている。



注意１　この図は、$p>0$ のときの図であるが、$p<0$ のときには３の半円が第１象限にくる。このとき１の半円と重なって見づらくなるようなときは、１の半円を $x=1$ に関して対称に作図するとよい。

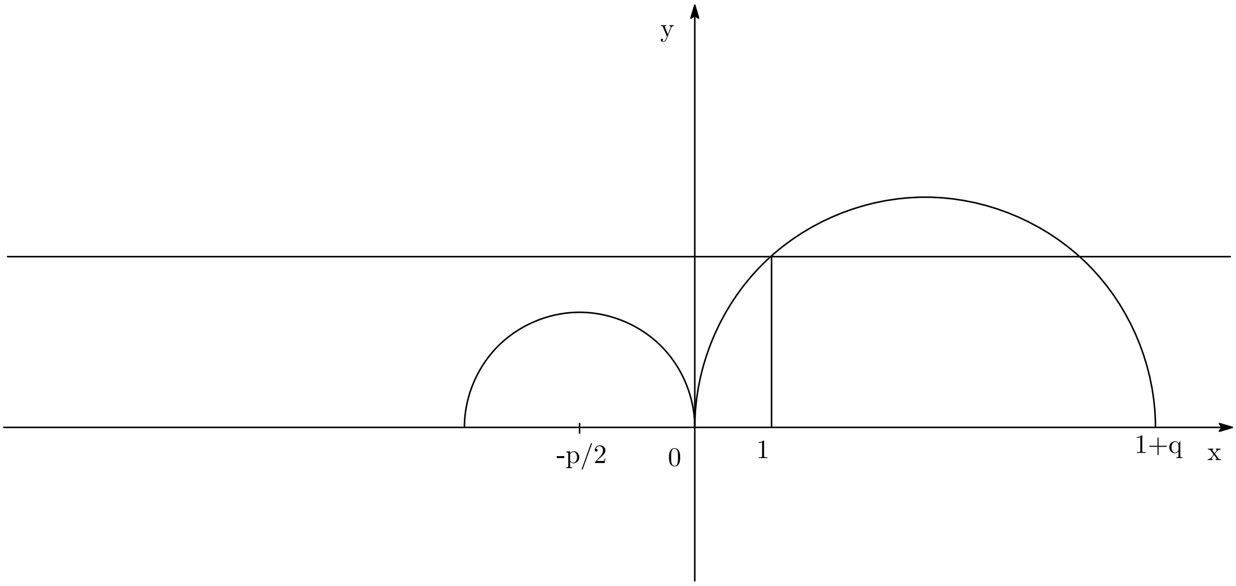
注意２　$q>0$ のときには、実数解を持たない場合がある。p と q の大小関係によっては、次のようなことも起こる。

(1) $\left|\dfrac{p}{2}\right|=\sqrt{q}$ のとき。



このとき円の半径と直線の高さが等しくなり、円と直線は接するため解は１つだけになる。

(2) $\left|\dfrac{p}{2}\right|<\sqrt{q}$ のとき。



このとき円の半径は直線の高さよりも小さくなり、円と直線は交わらない。実数解はない。

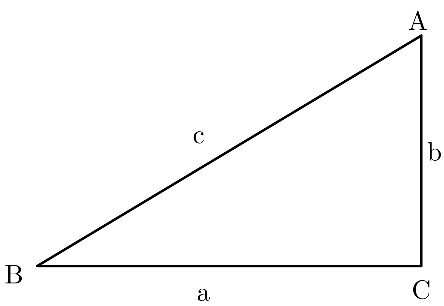
3.2.2 $q < 0$ の場合

$q < 0$ であれば、$q = -\left(\sqrt{|q|}\right)^2$ と考えて、上の方程式を

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{|q|}\right)^2$$

と考えよう。

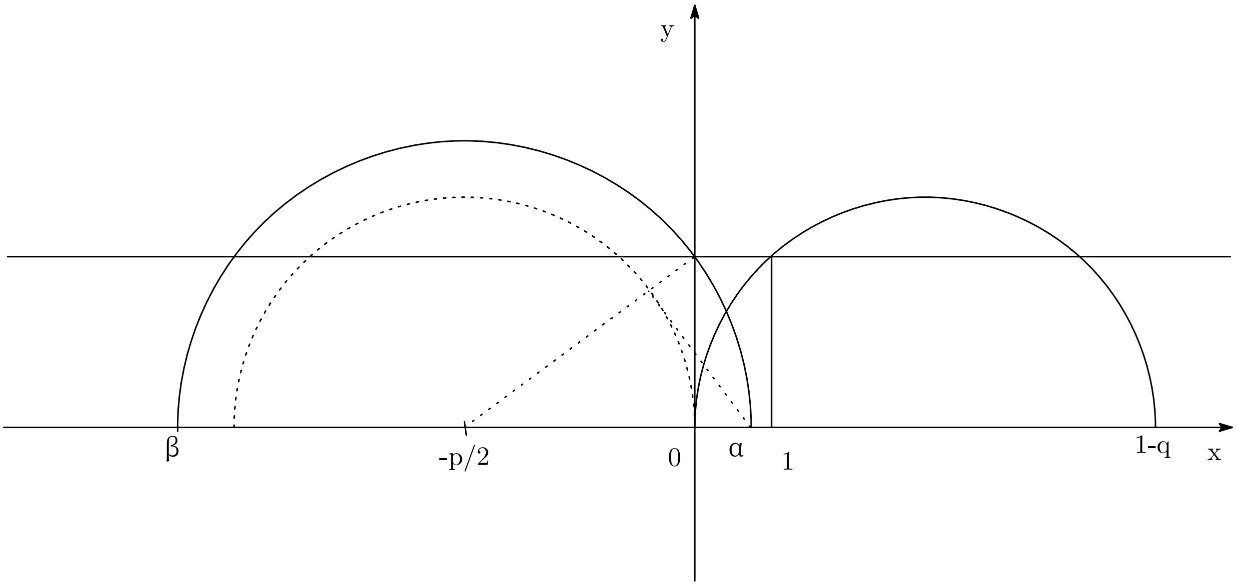
この場合には、斜辺にあたるのが数直線上で解 x と点 $-\dfrac{p}{2}$ の間の距離であり、直角をはさむ2辺が $\sqrt{q}$ と $|\dfrac{p}{2}|$ にあたる。



$a^2 + b^2 = c^2$

$$c = x - \left(-\frac{p}{2}\right), \quad b = \sqrt{q}, \quad a = |\frac{p}{2}|$$

となるように作図を工夫しよう。

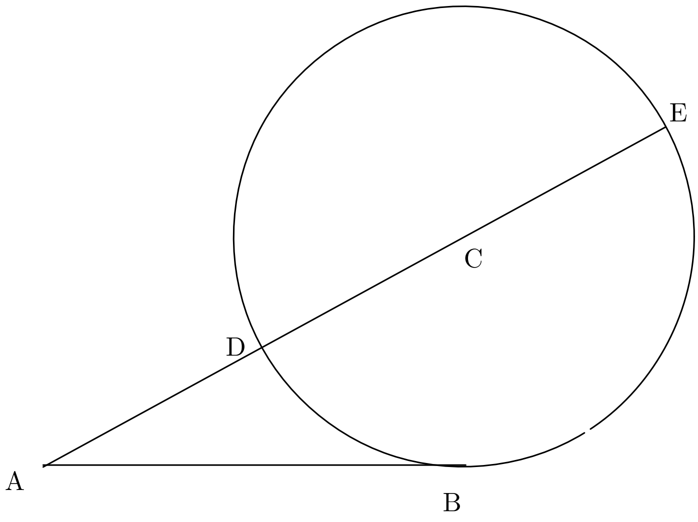


方程式 $x^2+px+q=0$ で $q<0$ のときには、

1. x 軸上の点 $x=\dfrac{1+|q|}{2}$ を中心に原点を通るように半円 $(y\geq 0)$ を描く
2. 直線 $x=1$ を引く。これと半円との交点を通り、x 軸に平行な直線を引く。
3. x 軸上の点 $x=-\dfrac{p}{2}$ を中心に、y 軸と 2 の直線との交点を通るように半円 $(y\geq 0)$ を描く

このように作図すると、3 の円と x 軸の交点が解になっている。

4　デカルトの方法



AB は円 C 接線である。そうすると、方べきの定理より、次の関係が成り立っている。

$$AB^2=AD\cdot AE$$

円の半径を $\dfrac{p}{2}$, $AB = \sqrt{q}$ として、$x = AE$ とすると、

$$x(x-p) = q$$

をみたしている。つまり、2 次方程式

$$x^2 - px - q = 0$$

の解が、図の AE に、長さとしてでてくる。

4.1 負の解について

デカルトの方法は、方程式をあらかじめ代数的に解いておくことなしに、方べきの定理の関係からいきなり図の中に解の長さを持つ線分が現れるところが趣き深いものがある。

2 次方程式の作図による解法を 3 種類比較するために、最初の方程式 $x^2 + px + q = 0$ にもどってみると、いま紹介したデカルトの方法は、(4)$p < 0, q < 0$ の場合に該当する。デカルトは、二つの解がともに負となる (1)$p > 0, q > 0$ の場合をやっていない。当時は負の解を考察の対象としていなかったからだそうだ。

以下、デカルトにならって、(1) の場合を除いて、考えることにする。

4.1.1 (1) $p > 0$, $q > 0$ の場合

実数解はあっても、二つとも負の解となるので、デカルトは当時の習慣にしたがってこの場合を考察の対象としていなかった。

4.1.2 (2) $p > 0$, $q < 0$ の場合

方程式 $x^2 + px + q = 0$ を、

$$x(x+p) = -q$$

と変形する。$-q > 0$ である。
(1) 長さ $\sqrt{-q}$ の線分 AB をとる。
(2) 点 B から長さ $\dfrac{p}{2}$ の垂線 CB をとる。
　（$p > 0$ である）
(3) 点 C を中心として半径 $\dfrac{p}{2}$ の円を描く。
(4) 直線 AC をひき、(3) の円との交点を、図のように D, E とする。
このように作図した場合、$x = AD$ とすると、$AE = x + p$ となっていて、方べきの定理より、$AD \cdot AE = AB^2$ が成り立っているから、x は、方程式 $x(x+p) = -q$ をみたしている。

方程式 $x^2 + px + q = 0$, $p > 0, q < 0$ は二つの実数解を持ち、正の解と負の解をひとつずつ持っている。そして $\alpha + \beta = -p < 0$ より、正の解の方が絶対値が大きいことがわかっているが、この図の中では、それがどのように表されているのだろうか。

これをみるために、方程式 $x(x+p) = -q$ において $y = -x$ とおくと、方程式は、$-y(-y+p) = -q$ すなわち、

$$y(y-p) = -q$$

となっている。同じ図で $AE = y$ とすると、$AD = y - p$ となり、$AD \cdot AE = AB^2$ であるから $y(y-p) = -q$ が成り立っている。

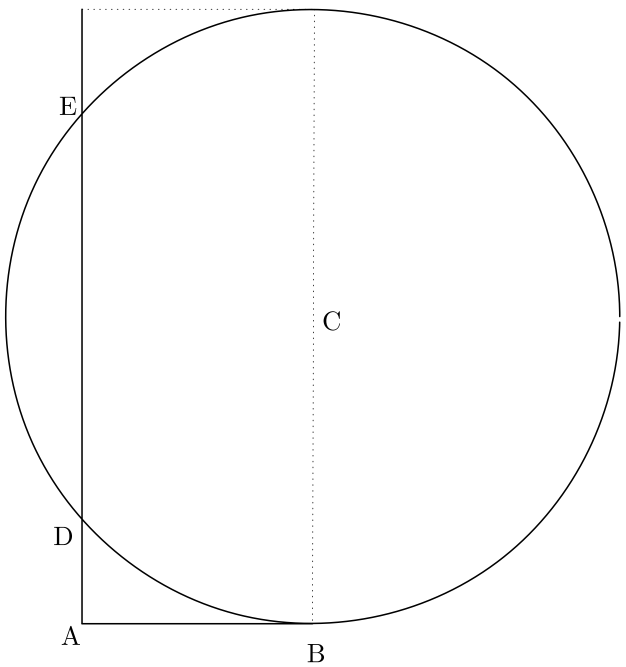
つまり、上のような図を描いたとき、AD の長さが、この 2 次方程式の正の解となっているし、AD の長さが、負の解の絶対値を表している。

4.1.3 (3) $p < 0,\ q > 0$ の場合

次に、$p < 0, q > 0$ の場合について考えてみよう。方程式 $x^2 + px + q = 0$ を変形して、

$$x(-p - x) = q$$

となる。$p < 0$ であるから、$-p > 0$ である。



次のように作図しよう。

(1) 長さ $\sqrt{q}$ の線分 AB をとる。

(2) 点 B から長さ $-\dfrac{p}{2}$ の垂線 CB をとる。

(3) 点 C を中心として半径 $-\dfrac{p}{2}$ の円を描く。

(4) 点 A を通り、線分 AB に垂直な直線をひき、(3) の円との交点を、図のように D, E とする。

このように作図したとき、$x = AB$ とすると、$AE = -p - AD = -p - x$ であるから、方べきの定理 $AD \cdot AE = AB^2$ は、この x が方程式 $x(-p-x) = q$ をみたしていることを示している。

また、$AE = -p - AD$ であることは、$AD = -p - AE$ でもあるので、$x = AE$ とおいたときには、$AD = -p - x$ となって、この 2 つの長さ、AD, AE はともに、方程式の解であることを示している。

注意

上の図は線分 AB の長さが、円の半径 $-\dfrac{p}{2}$ よりも小さい場合、すなわち、$-\dfrac{p}{2} < \sqrt{q}$ のとき

の図である。したがって、線分 AB と円の半径が等しい場合には、2 点 D, E は一つになるし、円の半径が小さいと交点 D, E は存在しない。このことが、この方程式が重解を持ったり、実数解を持たないことに対応している。

4.1.4 (4) $p < 0,\ q < 0$ の場合

この場合は、(2) の場合と同じ図を用いる。方程式 $x^2 + px + q = 0$ は、

$$x(x+p) = -q$$

の形に変形する。円の半径を $-\dfrac{p}{2}$, $AB = \sqrt{q}$ として、$x = AE$ とすると、$AD = x - (-p) = x + p$ となり、この x が 2 次方程式の 2 つの解を表していることがわかる。

また、方程式を $-x(-x-p) = -q$ と変形して、$y = -x$ とすると、

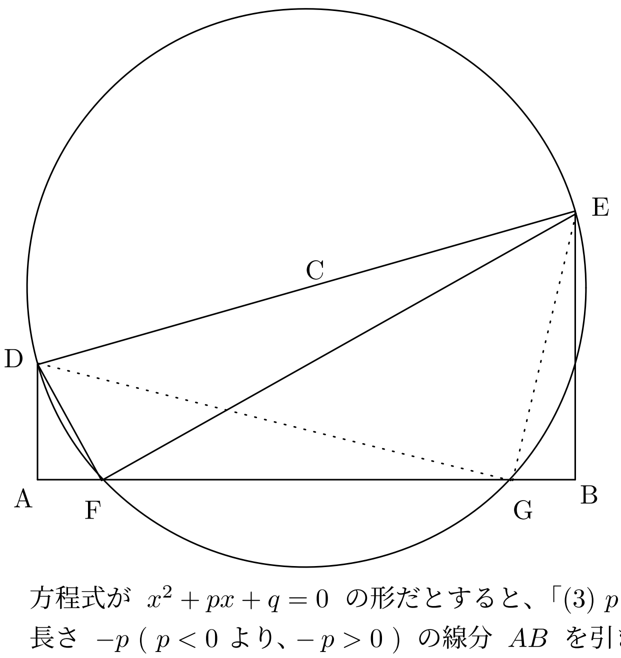
$$y\{y + (-p)\} = -q$$

として、$y = AD$ とすると、$AE = AD + DE = y + (-p)$ であるから、線分 AD の長さが方程式、$y(y-p) = 0$ の解になっていることがわかる。

つまり、上のような図を描いたとき、AE の長さが、この 2 次方程式の正の解となっているし、AD の長さが、負の解の絶対値を表している。

5 工藤君の方法について

杜稜サークルで佐々木先生が紹介してくれた工藤君の方法は、少し違う形をしていたが、サークルの議論をとおして整理された形で紹介する。次のような図を用いる。



方程式が $x^2 + px + q = 0$ の形だとすると、「(3) $p < 0, q > 0$ の場合」を考える。

長さ $-p$ ($p < 0$ より、$-p > 0$) の線分 AB を引き、点 A から、線分 AB に垂直で長さが 1 の線分 AD を引く。また、点 B から線分 AB に垂直で長さが q ($q > 0$) の線分 AE を

引く。このとき、点 E は直線 AB に関して点 D と同じ側にとる。次に線分 DE を直径とする円を描き、この円と線分 AB との交点を F, G とする。

このとき、点 F は DE を直径とする円の直径上の円周角であるから、

$$\angle DFE = \angle R$$

となるので、$\angle DFA + \angle EFB = \angle R$ である。また、三角形 DAF は $\angle A = \angle R$ の直角三角形だから、$\angle DFA + \angle FDA = \angle R$ である。したがって、

$$\angle FDA = \angle EFB$$

となる。ゆえに、

$$\Delta FDA \backsim \Delta EFB$$

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから、

$$DA : AF = FB : BE$$

となる。ここで、$AF = x$ とすれば、$FB = p - x$ であり、また、$AD = 1,\ BE = q$ であるから、

$$1 : x = (p - x) : q$$

すなわち、

$$x^2 + px + q = 0$$

を満たしていることがわかる。

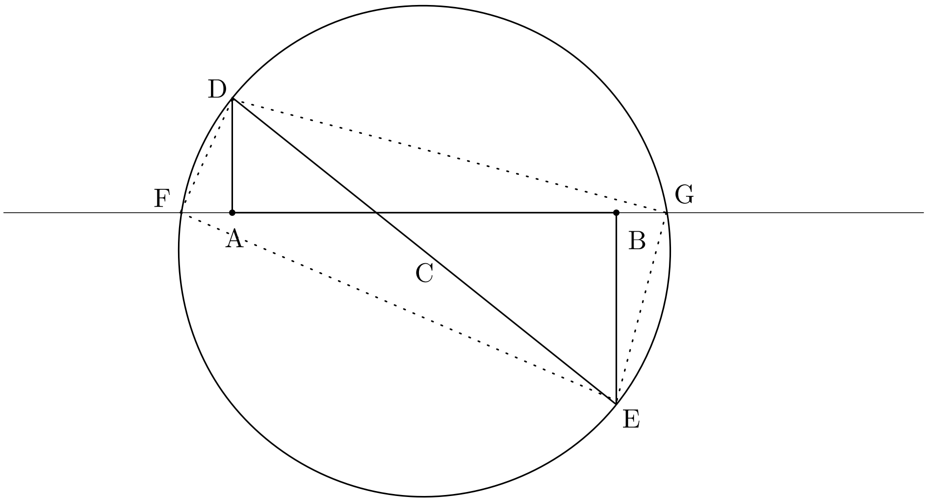
同じ議論は、ΔGDA と ΔEGB についてもできて、$y = AG$ も同じ方程式を満たしていることがわかる。

したがって、このような作図によって、得られた AF と AG が 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の二つの正の解であることがわかる。

5.1 (4) $p < 0,\ q < 0$ の場合

上の (1) の場合において、$q < 0$ となった場合にも、「負の長さ」によって線分の方向を反対にとるということにすると、同じ状況と考えることができる。

すなわち、長さ $-p$ ($p < 0$ より、$-p > 0$) の線分 AB を引き、点 A から、線分 AB に垂直で長さが 1 の線分 AD を引く。また、点 B から線分 AB に垂直で長さが q ($q > 0$) の線分 AE を引く。このとき、点 E は直線 AB に関して点 D と**反対側**とる。次に線分 DE を直径とする円を描き、この円と線分 AB の延長との交点を F, G とする。



このとき、点 F は DE を直径とする円の直径上の円周角であるから、

$$\angle DFE = \angle R$$

となるので、$\angle DFA + \angle EFB = \angle R$ である。また、三角形 DAF は $\angle A = \angle R$ の直角三角形だから、$\angle DFA + \angle FDA = \angle R$ である。したがって、

$$\angle FDA = \angle EFB$$

となる。ゆえに、

$$\Delta FDA \backsim \Delta EFB$$

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから、

$$DA : AF = FB : BE$$

となる。ここで、$AF = x$ とすれば、$FB = x + (-p)$ であり、また、$AD = 1,\ BE = -q$ であるから、

$$1 : x = (x - p) : (-q)$$

となり、これを整理しても

$$x^2 - px + q = 0$$

となって、最初の方程式を満たさないことになってしまう。

しかし、負の長さ q の線分 BE を取る時に方向を考えたように、ここでも、(1) の場合とは逆方向に点 F が現れていることに注意して、

$$x = -AF$$

と考えることにすれば、$FB = (-x) + (-p)$ となるから、

$$1 : (-x) = (-x - p) : (-q)$$

となり、これを整理すると最初の方程式、$x^2 + px + q = 0$ となっていることがわかる。

また、この場合、もう一つの点 G についても、方向まで考慮して、$y = AG$ として、ΔGDA と ΔEGB について考えると、$BG = AG - AB = y - (-p) = y + p$ となるから、

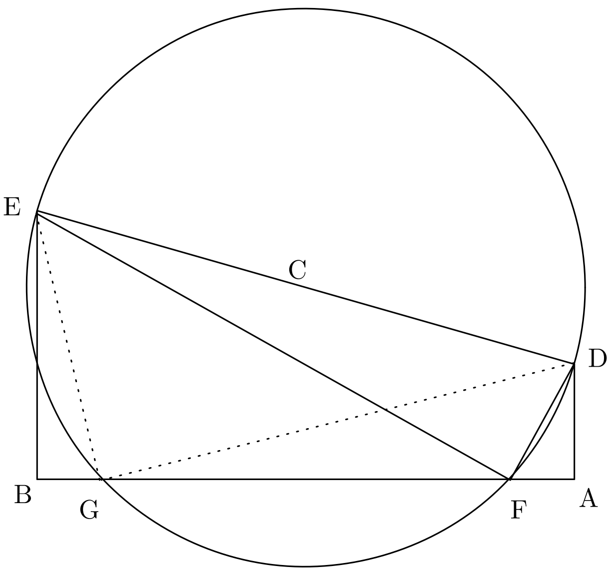
$$1 : y = (y + p) : (-q)$$

となり、整理すると、$y^2 + py + q = 0$ となる。

このように作図されたとき、点 A から点 B へ向かう方向を正の方向とする、「向き付けられた線分の長さ」を用いて、$x = AF,\ y = AG$ が 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解を与えていることが分かった。

さて、(3) の場合を考えている中で、方向を考えて $x = -AF$ としたのであるが、その結果を得る前に $AF = x$ としたときに、この x は方程式 $x^2 - px + q = 0$ の解であることがわかっている。このことは、2 点 $A,\ B$ の取り方を反対向きにすれば、$p > 0$ の場合については、$p < 0$ の場合に帰着されることを示している。

5.2 (1) $p > 0,\ q > 0$ の場合



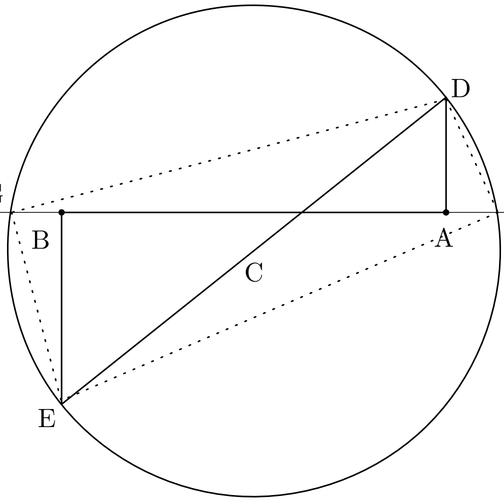
p の符号が変化しているので、(3) $p > 0, q > 0$ の場合の作図において、点 B を点 A に関して反対側にとる。$\Delta FAD \backsim \Delta EBF$ より、 $EB : BF = FA : AD$ を考えよう。 $x = AF$ とすると、$FA = -x$ であり、$BF = BA + AF = p + x$ となる。したがって、

$$q : (p + x) = (-x) : 1$$

となって、この x が方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解となることがわかる。また、同様に $y = AG$ としても同様である。したがって、この場合、AF と AG の長さは、二つの解の絶対値になっている。

5.3　(2)　$p > 0,\ q < 0$ の場合

(4) の場合を考えている中で、点 B のとり方を反対向きにすれば、上と同様である。

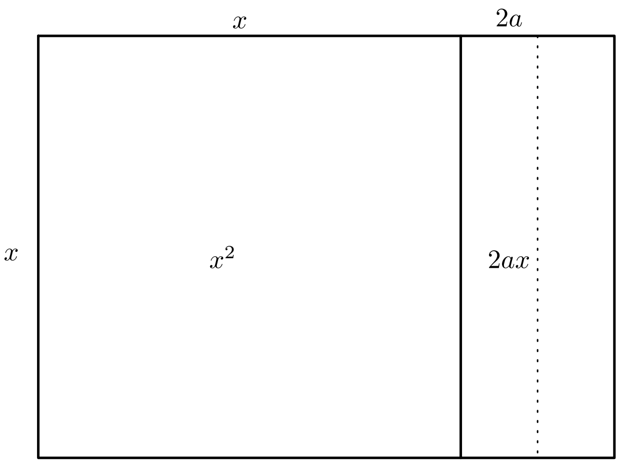


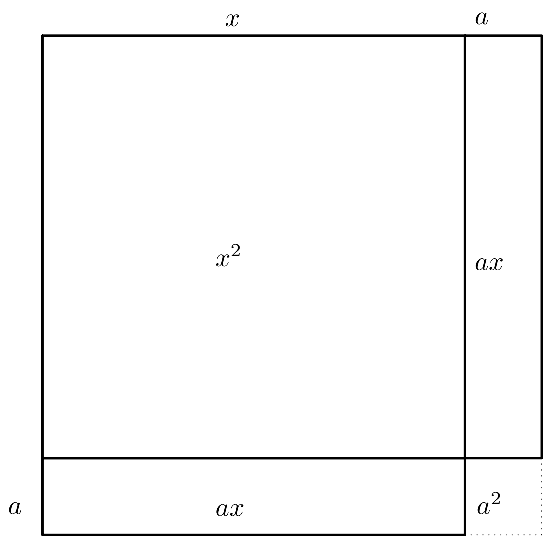
6　アル・ホレズミの『代数』

デカルトは 17 世紀世紀の人であるが、9 世紀のアラビアでは、次のようにして 2 次方程式を解いていた。例えば、方程式

$$x^2 + 6x = 7$$

を考えると、左辺の x^2 は一辺の長さが x の正方形の面積を表す。また、$6x$ は、たての長さが x でよこの長さが 6 の長方形の面積を表す。したがって、左辺はそのような正方形と長方形の面積の和となっている。この長方形は図のように変形すると、一辺 $x+3$ の正方形から、一辺 3 の正方形を除いた図形ができる。





したがって、

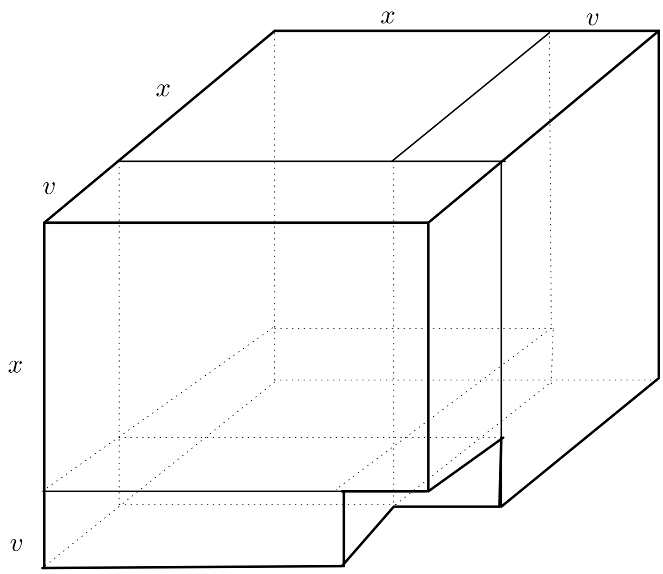
$$(x+3)^2 - 3^2 = 7$$

ということになって、

$$(x+3)^2 = 16$$

を解く事になる。

7　カルダノの3次方程式の解法



この図を見ると、一辺 x の立方体が1つ、底辺のたて v 、よこ x 、高さ $u = x + v$ の直方体が3つあって、外側の一辺 $u = x + v$ の立方体からは、小さな立方体 v^3 だけ足りない。これを式で表すと、

$$x^3 + 3uvx = u^3 - v^3, \qquad u = x + v$$

となっている。

　この関係を使って方程式

$$x^3 + 6x = 20$$

を考えてみよう。

　上の二つの式の係数を比較すれば、

$$\begin{aligned} uv &= 2 \\ u^3 - v^3 &= 20 \end{aligned}$$

となるような $u,\ v$ を見つければよいことになる。$uv = 2$ の両辺を3乗して $U = u^3,\ V = v^3$ とすれば、

$$UV = 8, \qquad U - V = 20$$

を解けばよいことになる。

$U=V+20$ を代入して、$UV=V^2+20V=8$ となるが、これから、$(V+10)^2=108$ となる。したがって、

$$V=\sqrt{108}-10, \quad U=\sqrt{108}+10$$

となる。これから、

$$u=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}, \quad u=\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

これから、

$$x=u-v=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

という解が求められた。

この特別な方程式を解く手順から、

$$x^3+ax=b$$

という一般的な方の解法の規則を次のように帰納している。

- 未知数の係数の $\frac{1}{3}$ を立方し、
- それに定数項の $\frac{1}{2}$ を加える
- この和の平方根をつくる
- この数に、定数項の $\frac{1}{2}$ を加えたものと
- 定数項の $\frac{1}{2}$ を引いたものとをつくる
- 前者の 3 乗根から、後者の 3 乗根を引いたものが求める数である

としていた。

求められた解は 3 つのうちの一つだけであるが、他の解については考えていない。それが幾何学的な方法の特徴であった。しかし、この規則を適用しているうちに、負の数や虚数が数として認められるようになり、3 次方程式は三つの解を持つという認識が一般的なものになっていく。

8　さいごに

虚数が市民権を得たのがそんなに古くないというのは分かるような気がするが、負の数も市民権を得てからそんなに時間がたっていないのだということを、2 次方程式の作図を通して感じることができた。また、工藤君の方法を考えることを通して、座標が導入される必然性のようなものを感じることができた。