正多角形を並べる

宮本次郎

2003 年 03 月 08 日

1 はじめに

次のようなメールをもらった。

> はじめまして。今日「取れたて通信」を見ていて、ふと以前に考えた問題（？）であやふやなまま忘れたことを思い出しました。確かかどうかわからないけど …
> もしそうだとしたら証明のしがいもあるような気がします。（証明できているのかもしれません。）
>
> > 合同な正多角形について、敷き詰め可能な図形に関しては 1 の周りに図形が集まります。（これは問題ないし）
> > これを正 5 角形で敷き詰めようとすると中ほどに隙間は空くものの、辺と辺が重なるようにつなげると、 1 回転（ 1 周 ）して元に戻ってきます。
> > うまく表現できませんが … 実験してみてください。これはもしかしたら、どんな正多角形でもできるのではないかと予想しています。
>
> どんなもんでしょう …?

このメールをめぐっていろいろと考えたことを紹介する。

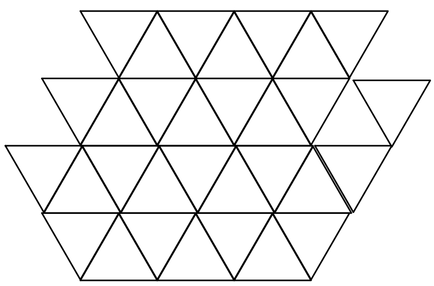
2 正多面体の敷き詰め

正 n 角形の 1 つの内角は $\dfrac{n-2}{n}\pi$ であるから、これが m 個集まって 2π となるには

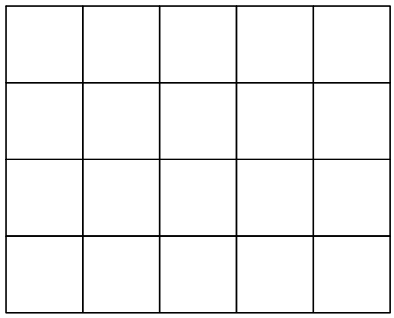
$$m \cdot \frac{n-2}{n} = 2$$

をみたさなければならない。

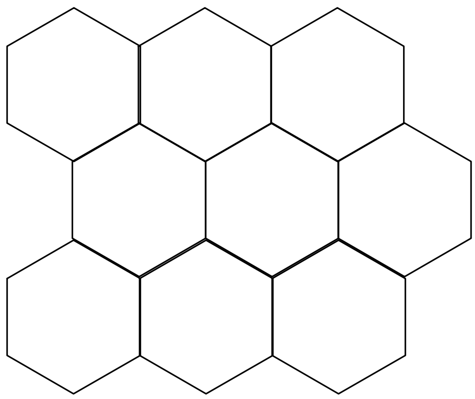
$n=3$ のときには、 $m=6$ であり、次のような状態になる



$n = 4$ のときには、 $m = 4$ であり、次のような状態になる



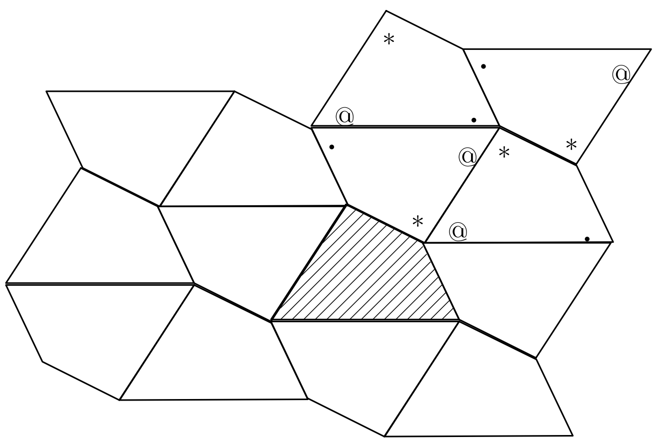
$n = 5$ のときには、これをみたすような自然数 m は存在しない。
$n = 6$ のときには、 $m = 3$ であり、次のような状態になる



$n \geqq 7$ では、当然 $m < 3$ となるが、ということは $m = 1, 2$ であるから、この場合には正多面体が 1 点に集まってぴったりと被うことはないということになる。

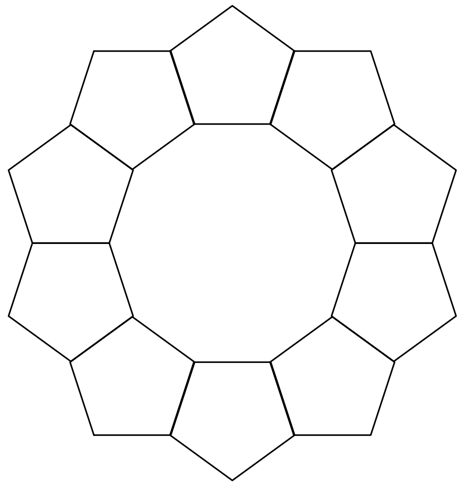
正多面体で平面を敷き詰めることができるのは、以上の 3 つの場合しかない。

任意の凸四角形の場合　には、よく知られているように、次のように平面敷き詰めが可能である。



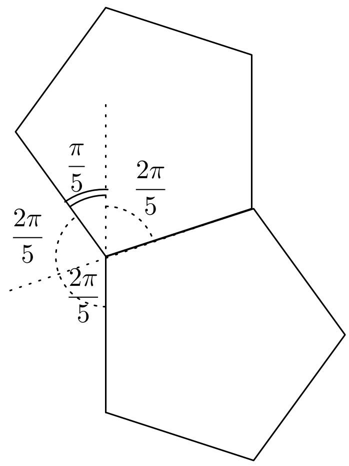
3　正五角形でできる花

まず始めに、メールで紹介されたことがどういうことなのか、実際に並べてみた。



このように並べると、確かに正 5 角形を、 1 つの辺を共有するように、そして、いつも同じ相対的な位置に繋げていくと、 10 個でぐるりと 1 回転して戻ってくるように見える。

この図を見ていると、 1 回転してできる図形は正 10 角形であり、その各辺は、正 5 角形のどの辺かと平行になっているように見える。もしそうであれば、ぐるっと回ってきたときに辺が最初と同じ方向を向いていることは証明できそうな気がしてきた。



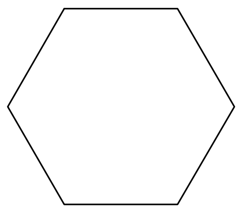
正 5 角形が並んでできる穴の縁である図形（正 10 角形）の１つの外角は、上の図から $\frac{\pi}{5}$ になっている。どの外角も、これと同じ状況であるから、この穴の縁を歩いている人が、 m 個の角で進行方向を変化させる角度の合計は、 $\frac{\pi}{5} \times m$ となる。したがって、 $m = 10$ のときに、その合計は 2π となり、最初と同じ方向を向くことになる。

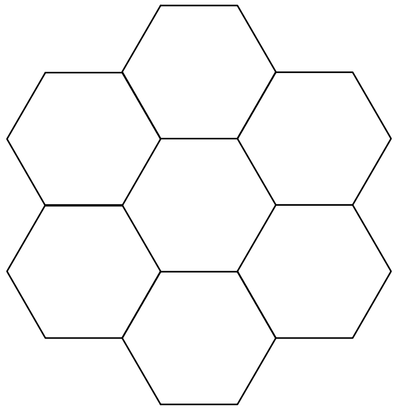
このようにしてできる図形の上を歩いている人の進行方向は、全部で 10 の方向しかないことがわかった。残されたのは、同じ方向を向いたときに、最初と同じ場所に戻ってくるかどうかであろう。これもなんとか証明できそうな感じがする。

4　他の場合

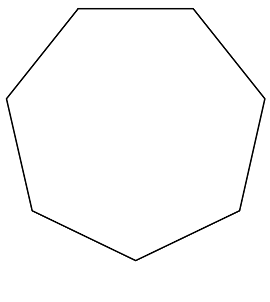
そこで、他の場合について何が起こるか、実際に確かめてみることにした。

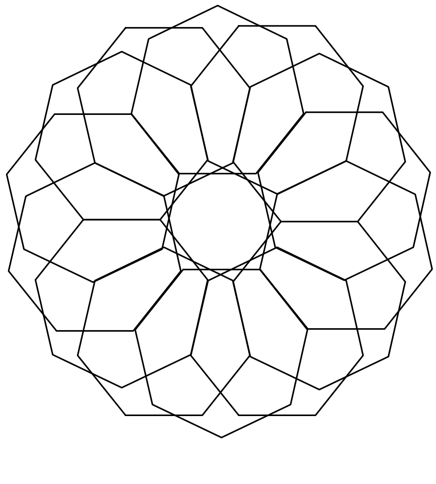
$n=6$ **の場合**



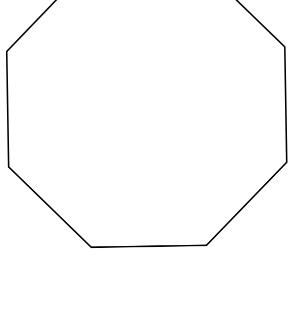


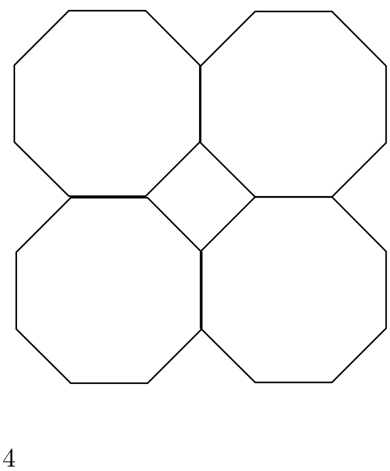
$n=7$ **の場合**



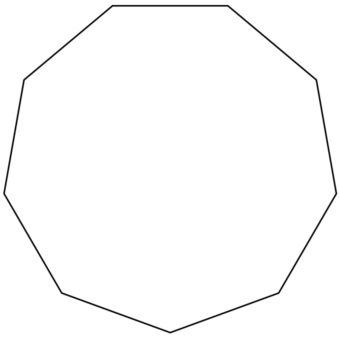


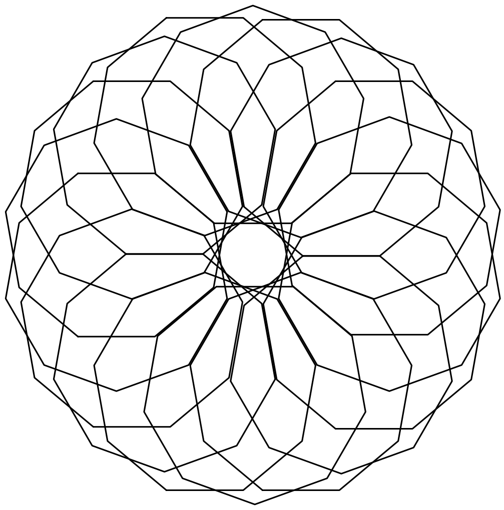
$n=8$ **の場合**





$n = 9$ **の場合**

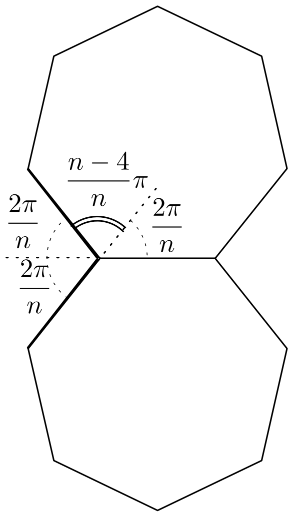


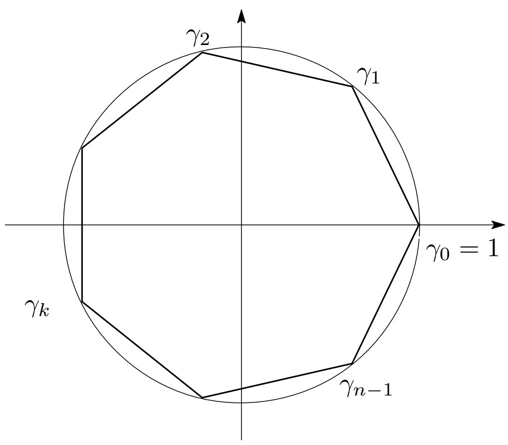


5　同じ場所に戻ることの証明

正 n 角形の場合の一つの頂点 P_0 から出発して一つの辺を移動し、次の頂点では、上の図の太線のように方向を変化させる。

正 n 角形の一つの外角は、$\dfrac{2\pi}{n}$ であるから、一つの辺に沿って次の頂点 P_1 に到着したところで、角度にして $\dfrac{2\pi}{n}$ だけ方向を変化させる。以下、これを繰り返して、点 $P_0,\ P_1,\ P_2,\ \cdots, P_n$ をとる。点 P_0 を出発するときの進行方向 $\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{v_0}$ とし以下 $\overrightarrow{P_kP_{k+1}} = \overrightarrow{v_k}$ とする。





複素数平面上に $\gamma_0 = 1, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n-1}$ を

$$\gamma_k = \cos\frac{2\pi}{n}k + i\sin\frac{2\pi}{n}k, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

とする。 $\gamma_0 = 1, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n-1}$ は正 n 角形の頂点になっている。このとき、さらに $\omega_0 = 1, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{2n-1}$ を

$$\omega_k = \cos\frac{\pi}{n}k + i\sin\frac{\pi}{n}k, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1$$

とすると、 $\omega_0 = 1, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{2n-1}$ は方程式 $x^{2n} = 1$ の異なる $2n$ 個の解のすべてである。もちろん

$$\gamma_k = \omega_{2k}$$

となっている。

このように用意した複素数を用いて、点 P_k を表わしてみよう。ベクトル $\overrightarrow{v}$ を、 θ だけ回転する作用素を $R(\theta)$ としよう。

点 P_0 を出発して $\overrightarrow{v_0} = \gamma_1 - \gamma_0$ だけ移動した結果点 P_1 に到達したとする、

$$P_1 = P_0 + \overrightarrow{v_0} = P_0 + \gamma_1 - \gamma_0 = P_0 + \omega_2 - \omega_0$$

となる。次に、進行方向を $\dfrac{n-4}{n}\pi$ だけ回転して、同じ距離だけ移動することになる。このときの移動 $\overrightarrow{v_1}$ は

$$\overrightarrow{v_1} = R\left(\frac{n-4}{n}\pi\right)\overrightarrow{v_0} = R\left(\frac{n-4}{n}\pi\right)(\omega_2 - \omega_0)$$

となる。このとき、

$$R\left(\frac{n-4}{n}\pi\right)\omega_k = \omega_{k+(n-4)}$$

であるから、

$$\overrightarrow{v_1} = R\left(\frac{n-4}{n}\pi\right)(\omega_2 - \omega_0) = \omega_{2+(n-4)} - \omega_{n-4}$$

となる。これから、 $k = 0, 1, \cdots$ に対して

$$P_{k+1} = P_k + \omega_{2+(n-4)k} - \omega_{(n-4)k}$$

が成り立つことになる。

このとき、 $d = (2n, n-4)$ として、 $2n = dm,\ n-4 = dl$ とすると、 $2n$ と $n-4$ の最小公倍数は $m(n-4)$ となるので、

$$\omega_0, \omega_{(n-4)}, \omega_{2(n-4)}, \cdots, \omega_{(m-1)(n-4)}$$

までは異なった m 個であり、 $\omega_{m(n-4)}$ は ω_0 に等しくなる。同様に、

$$\omega_2, \omega_{2+(n-4)}, \omega_{2+2(n-4)}, \cdots, \omega_{2+(m-1)(n-4)}$$

までは異なった m 個であり、 $\omega_{2+m(n-4)}$ は ω_2 に等しくなる。したがって、

$$\begin{aligned}
& P_m \\
= \ & P_0 + (\omega_2 - \omega_0) + \left(\omega_{2+(n-4)} - \omega_{(n-4)}\right) + \left(\omega_{2+2(n-4)} - \omega_{2(n-4)}\right) + \\
& \qquad + \cdots + \left(\omega_{2+(m-1)(n-4)} - \omega_{(m-1)(n-4)}\right) \\
= \ & P_0 + \left(\omega_2 + \omega_{2+2(n-4)} + \cdots + \omega_{2+(m-1)(n-4)}\right) \\
& \qquad - \left(\omega_0 + \omega_{2(n-4)} + \cdots + \omega_{(m-1)(n-4)}\right)
\end{aligned}$$

となる。ところが、 $\omega_0, \omega_{(n-4)}, \cdots, \omega_{(m-1)(n-4)}$ は、 1 の $2n$ 乗根からなる乗法群の部分群になっており、 1 の m 乗根が m 個すべてが現れている。($m = \dfrac{2n}{d}$) したがって、これらの和については、

$$\omega_0 + \omega_{2(n-4)} + \cdots + \omega_{(m-1)(n-4)} = 0$$

であるし、これらを全て $\dfrac{2\pi}{n}$ だけ回転したものの和についても

$$\omega_2 + \omega_{2+2(n-4)} + \cdots + \omega_{2+(m-1)(n-4)} = 0$$

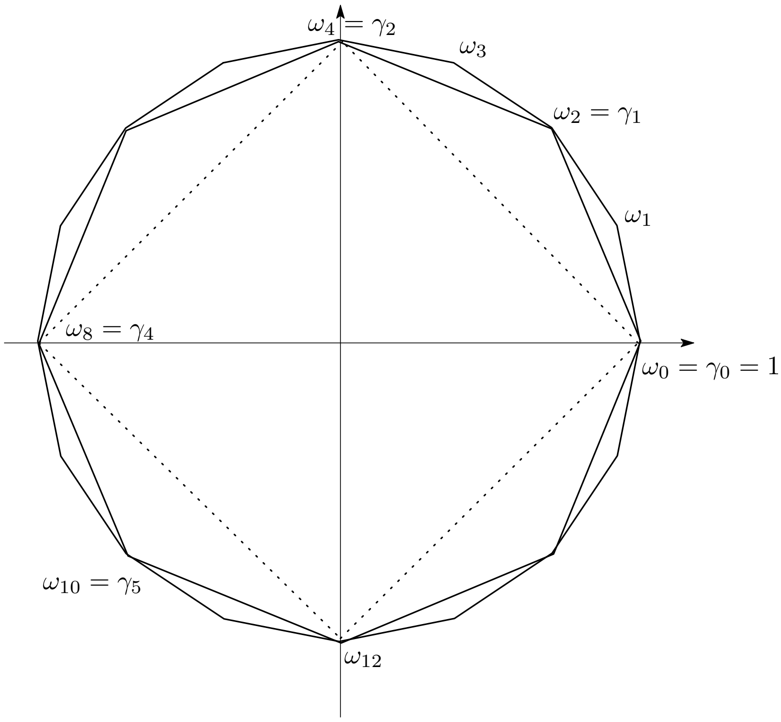
となるから、結局 $P_m = P_0$ となる。

以上で、正 n 角形を $m = \dfrac{2n}{(2n, n-4)}$ 個同じようにつなぎあわせていくと、最初に戻るということが証明された。

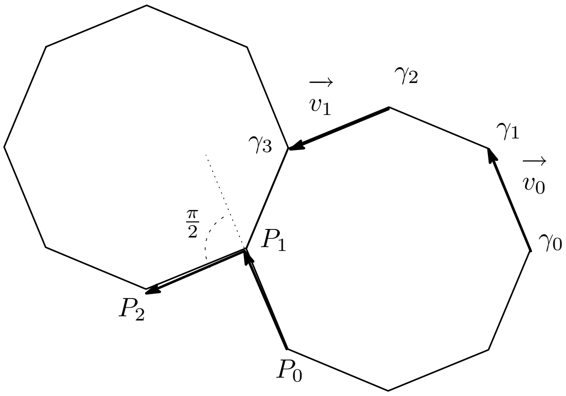
さらに、このようにしてできる花形の図形は、「正 $\dfrac{2n}{n-4}$ 角形」とよばれているものである。「正 $\dfrac{n}{m}$ 角形」とは、折れ線を星型のように描いていくとき、いつも同じ距離移動したら一定の角度で方向を変化させるときに、全部で n の角でできた星型で、元に戻るまでに、中心のまわりを m 回転しているような図形である。

6 具体的に見てみよう

$n = 8$ **の場合** を具体的に考えてみよう。



この図と次の図を見ながら、前節の証明をもう一度たどることにしよう。



正八角形の一つの頂点 γ_5 を P_0 としよう。もう一つの正八角形を辺 $\gamma_3\gamma_4$ を共有するように、上の図のように置く。この点 $P_0 = \gamma_5$ を出発して、辺 $\gamma_4\gamma_5$ 上を、ベクトル $\overrightarrow{v_0} = \gamma_1 - \gamma_0$ だけ移動して点 $P_1 = \gamma_4$ に到達する。ここで、隣の正八面体の辺に移って移動を続けることになるが、このとき、移動のベクトルは角 $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転されることになる。すなわち、

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1} &= R\left(\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{v_0} = \gamma_3 - \gamma_2 = \omega_6 - \omega_4 \\
\overrightarrow{v_2} &= R\left(\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{v_1} = \gamma_5 - \gamma_4 = \omega_{10} - \omega_8 \\
\overrightarrow{v_3} &= R\left(\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{v_2} = \gamma_7 - \gamma_6 = \omega_{14} - \omega_{12}
\end{aligned}
$$

であり、点 P_0 から出発して

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_0 + (\omega_2 - \omega_0) \\
P_2 &= P_1 + (\omega_6 - \omega_4) \\
P_3 &= P_2 + (\omega_{10} - \omega_8) \\
P_4 &= P_3 + (\omega_{14} - \omega_{12})
\end{aligned}
$$

というように移動していく。したがって、

$$
\begin{aligned}
P_4 &= P_3 + (\omega_{14} - \omega_{12}) \\
&= P_2 + (\omega_{10} - \omega_8) + (\omega_{14} - \omega_{12}) \\
&= P_1 + (\omega_6 - \omega_4) + (\omega_{10} - \omega_8) + (\omega_{14} - \omega_{12}) \\
&= P_0 + (\omega_2 - \omega_0) + (\omega_6 - \omega_4) + (\omega_{10} - \omega_8) + (\omega_{14} - \omega_{12}) \\
&= P_0 + (\omega_2 + \omega_6 + \omega_{10} + \omega_{14}) - (\omega_0 + \omega_4 + \omega_8 + \omega_{12})
\end{aligned}
$$

となる。ところが、ここで、 $\omega_0, \omega_4, \omega_8, \omega_{12}$ というのは 1 の 4 乗根が 4 つとも全部出てきているし、この 4 つをそれぞれ $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転して得られる $\omega_2, \omega_6, \omega_{10}, \omega_{14}$ についても

$$
\omega_0 + \omega_4 + \omega_8 + \omega_{12} = 0, \quad \omega_2 + \omega_6 + \omega_{10} + \omega_{14} = 0
$$

である。したがって、

$$
P_4 = P_0
$$

となるのである。